Lemma 0.1. *Das Funktional $\alpha \to L_\alpha$ hat eine Σ_1-Definition, die absolut ist für L_λ für alle λ Limes. D.h. für alle $\alpha \in L_\lambda$ ist $L_\lambda \vDash$"$\alpha \to L_\alpha$".*

Korollar 0.1. Gödel's Kondensationslemma
Sei λ Limes, $M \prec L_\lambda$. Dann ist $M \cong L_\delta$ für ein $\delta \leq \lambda$

Bemerkung 0.1. Wenn $\delta \subset M \Rightarrow M = L_\delta$.
Es genügt, dass $M \equiv L_\lambda$, M fundiert.

Lemma 0.2. *$<_L$ hat eine Δ_1^{ZFC}-Definition, die absolut für alle λ Limes ist.*

Konsistenzstärke: Messbare Kardinalzahl $\to 0^\sharp$ existiert $\to$ stark unerreichbar.

⟨Order-Indiscernibility, Standard-Lemma hier einfügen⟩

Definition 0.1. $I \subset L_\alpha$ hißt *indiscernible*, wenn $I \subset \alpha$ und I bzgl der natürlichen Ordnung indiscernible in $(L_\alpha, \in\restriction L_\alpha)$ ist.

Lemma 0.3. *I indiscernible in L_λ, $\lambda \geq \omega_1$ limes, $\gamma \in \boldsymbol{On}$. Dann existiert ein L_β mit Indiscernibles J mit $\mathsf{otp}(J) = \gamma$, (L_β, J) hat den selben EM-Typ wie (L_γ, I) und L_β definierbar über J. β und J sind eindeutig bestimmt: $(L_\beta, J) =$"γ Version von (L_λ, I)".*

Definition 0.2. λ Limes, I überabzählbar. Eine Menge von Indiscernibles heißt *Silver-Indiscernibles* wenn

a) *I erzeugend:* In L_λ ist jedes Element definierbar über I (d.h. $a = t(\bar{i}), \bar{i} \in I$, $t(\overline{x})$ Skolemfunktion von L_λ)

b) *I kofinal* in λ

c) *I diagonal*: Für $\alpha \in I$ ist $I_{\geq\alpha}$ indiscernible über α (d.h. indiscernible in $(L_\lambda, \beta)_{\beta<\alpha}$.

Falls $0^\sharp$ existiert, dann I eindeutig

Theorem 0.1. *Sei κ messbar, dann hat L_κ Silverindiscernibles.*

Lemma 0.4. *Sei I unendliche Menge von Indiscernibles in L_λ mit EM-Typ Σ.*

a) I diagonal $\Leftrightarrow$ Für φ, geordnete Variablentupel $\overline{y}, \overline{z}$:
$\forall \overline{u} < \overline{y}, \overline{z}\ (\varphi(\overline{u}, \overline{y}) \leftrightarrow \varphi(\overline{u}, \overline{z})) \in \Sigma$
Beispiel: $\forall u, v < x_9 \varphi(u, v, x_9, x_{10}) \leftrightarrow \varphi(u, v, x_{101}, x_{700})$

b) Sei I erzeugend. Dann ist I kofinal $\Leftrightarrow$ $I \neq \varnothing$ ohne letztes Element und für alle Variablentupel $\overline{x} < z$: $\exists u \in \boldsymbol{On}\, \varphi(u, \overline{x}) \to \exists u < z\ \varphi(u, \overline{x})$

Lemma 0.5. *I indiscernible und erzeugend in L_λ, $\mathsf{otp}(I) > \omega$ und I kein letztes Element. Dann sind äquivalent:*

1. *I diagonal*

2. *α Limeselement von I. Dann sind alle $\beta < \alpha$ definierbar über $I \cap \alpha$*

3. *Punkt 2) gilt für mindestens ein Limeselement von I.*

Lemma 0.6. *I indiscernible in L_λ, λ Limeszahl, I erzeugend, kofinal, diagonal.*

1. *I abgeschlossen in L_λ*

2. *κ überabzählbare Kardinalzahl $< \lambda$, dann ist $|I \cap \kappa| = \kappa$, insbesondere $\kappa \in I$.*

3. *α Limeszahl von I. Dann ist L_α =definierbarer Abschluss von I (in L_λ). Insbesondere $L\alpha \prec L_\lambda$.*

4. *α Limeszahl von I, $I \cap \alpha$ überabzählbar $\Rightarrow I \cap \alpha$ Silverindiscernible in L_α*

Theorem 0.2. *Alle Silverindiscernibles haben den selben EM-Typ (dieser ist $0^\sharp$)*

Korollar 0.2. *Sei λ Limeszahl. Dann existiert höchstens eine Menge von erzeugenden Indiscernibles vom EM-Typ $0^\sharp$.*

Bemerkung 0.2. Ist λ überabzählbar, dann sind das Silverindiscernibles.

Beschreibung von $0^\sharp$: Die eindeutig bestimmte Menge von Formeln Σ mit

a) Extensionalitätsaxiom und $V = L$ gehören zu Σ (d.H. fundierte Modelle sind isomorph zu L_λ)

b) Σ deduktiv abgeschlossen, konsistent und vollständig

c) $i_1 < i_2 < ... < i_n, j_1 < ... < j_n$, dann $(\varphi(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(x_{j_1}, ..., x_{j_n})) \in \Sigma$ (d.H. mit x_i als Konstanten interpretiert sind diese in jedem Modell indiscernible) (b) und c) besagen, dass Σ ein EM-Typ ist)

d) $On(x_1) \wedge (x_1 < x_2) \in \Sigma$ (d.H. die Indiscernibles sind in $\mathbf{On}^{\mathfrak{A}}$ und natürlich geordnet)

e) $\forall \overline{u} < \overline{y}, \overline{z}\ (\varphi(\overline{u}, \overline{y}) \leftrightarrow \varphi(\overline{u}, \overline{z})) \in \Sigma$ (d.H. die Indiscernibles sind diagonal) $(\exists u \in \mathbf{On}\ \varphi(u, \overline{y}) \rightarrow \exists u < z\ \varphi(u, \overline{y})) \in \Sigma$ (für $\overline{y} < z$; d.H. die Indiscernibles sind kofinal, falls erzeugend)

f) Was fehlt ist: Für γ ist die von Indiscernibles I mit $\mathsf{otp}(I) = \gamma$ und $\mathsf{EM}(I) = \Sigma$ aufgespannte Struktur fundiert. Der Beweis von Satz x zeigt, dass es genügt, das für alle abzählbaren γ zu zeigen.

   Wie komplex ist die Beschreibung von $0^\sharp \subset V_\omega$?

Definition 0.3. Eine Σ^1_n-Formel hat die Form

$$\underbrace{\exists X_1 \subset V_\omega \forall X_2 \subset V_\omega ...}_{n \text{ Quantoren}} \underbrace{\varphi(X_1, ..., X_n, V_\omega, \overline{Y})}_{\Delta_0} = \psi(\overline{Y})$$

Dual Π^1_n-Aussagen.

Theorem 0.3. *$0^\sharp$ ist eine Π^1_2-Einermenge, d.H. es gibt Π^1_2-Formel $\psi(Y)$ so dass $\psi(Y) \Leftrightarrow Y = \{0^\sharp\}$*

Korollar 0.3. *$0^\sharp$ ist Δ^1_3-Menge:*

$$0^\sharp = \{y \in V_\omega \mid \exists Y \subset V_\omega\ \psi(Y) \wedge y \in Y\} = \{y \in V_\omega \mid \forall Y \subset V_\omega\ (\neg\psi(Y) \vee y \in Y)\}$$

Theorem 0.4. *1. $0^\sharp$ existiert gdw es einen Club $I \subset$ **On** gibt, so dass für alle überabzählbaren κ:*

(a) $\kappa \in I$

(b) $I \cap \kappa$ indiscernible in L_κ

(c) $I \cap \kappa$ erzeugt L_κ

2. I ist eindeutig bestimmt

3. $\kappa' < \kappa$ überabzählbar, dann $L_{\kappa'} \prec L_\kappa$

Daraus folgt, dass für alle Aussagen φ gilt $L \vDash \varphi \Leftrightarrow L_\kappa \vdash \varphi$ für ein/alle überabzählbare Kardinalzahl κ (Dunh dunh DUNH)

Korollar 0.4. *Die Elemente von I sind stark unerreichbar und Mahlo in L*

Theorem 0.5. *Wenn für eine Limeszahl λ, L_λ eine überabzählbare Menge I von Indiscernibles enthält, dann existiert $0^\sharp$*

Korollar 0.5. *Existiert Ramseyzahl $\Rightarrow 0^\sharp$ existiert.*

Theorem 0.6. *$0^\sharp$ existiert gdw $j : L_\lambda \prec L_\lambda$ für λ Limes und $j \neq 1$*

Theorem 0.7. *Sei κ kritischer Punkt von $j : L_\lambda \prec L_\lambda$. Dann ist κ schwach kompakt in L.*

Lemma 0.7. *κ kritischer Punkt von $j : L_\lambda \prec L_\lambda$. Dann ist $\mathcal{U} = \{U \subset \kappa \mid U \in L_{\lambda+1}, \kappa \in j(U)\}$ ein L_λ-Ultrafilter auf κ; d.H. in der Boolschen Algebra der L_λ-definierbaren Teilmengen von L_λ.*

Lemma 0.8. *$\mathcal{U}$ hat folgende Eigenschaften:*

1. $\mathcal{U}$ ist ω-konsistent: $\bigcap_{i<\omega} U_i \neq \varnothing, U_i \in \mathcal{U}$ (Beachte: Die Folge der U_i muss nicht in $L_{\lambda+1}$ liegen!)

2. $\mathcal{U}$ ist L_λ-Normal: $U \in \mathcal{U}, f : U \to \kappa$ aus $L_{\lambda+1}$ regressiv $\Rightarrow f \restriction U'$ =konstant für ein $U' \in \mathcal{U}$, $U' \subset U$.

3. $(U_\alpha \mid \alpha < \kappa) \in L_{\lambda+1}$, $U_\alpha \in \mathcal{U} \Rightarrow \Delta_{\alpha<\kappa} U_\alpha \in \mathcal{U}$.