Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Mathematisches Institut

Die Konsistenz der P-Ideal-Dichotomie

Masterarbeit

Dennis Müller
Matrikel-Nr. 3104758

12. Februar 2015
Betreuer: Prof. Dr. Heike Mildenberger

Inhaltsverzeichnis

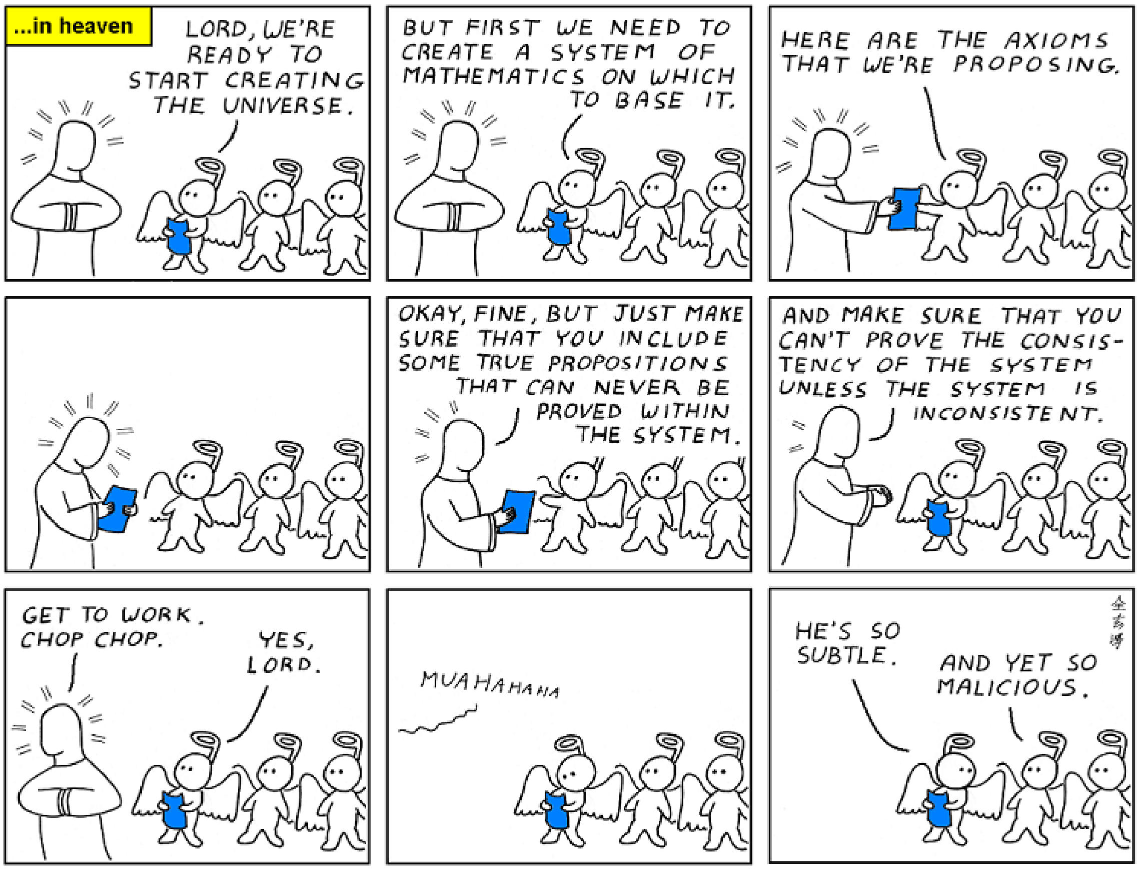

Abbildung 1: `http://abstrusegoose.com/244`

„In mathematics you don't understand things. You just get used to them.“
- John von Neumann

„Start by eliminating the possibility of empty models by praying that Heaven will no longer put this invention of the Devil in our way. To do this, we add a constant c to our language ...“
- Bruno Poizat and M. Klein

0 Einleitung

Das Ziel dieser Masterarbeit ist es, die Konsistenz der P-Ideal-Dichotomie (kurz PID) zu zeigen. Wir werden dies auf zwei verschiedene Arten tun; zum einen mit Hilfe des Proper Forcing Axioms, zum Anderen mit $\mathbb{D}$-vollständigem Forcing. Ersteres zeigt die Konsistenz von $\mathsf{PID}+\neg\mathsf{GCH}$, letzteres die von $\mathsf{PID}+\mathsf{GCH}$. Nachdem $\mathbb{D}$-vollständige Forcings im Vergleich zu proper Forcings weniger weit verbreitet sind, werden diese ausführlicher besprochen werden und stellen den zentraleren Teil dieser Arbeit dar.

Die P-Ideal-Dichotomie wurde von Todorčević in [Tod00] vorgestellt und als konsistent erwiesen; die selbe Aussage eingeschränkt auf Grundmengen der Mächtigkeit ω_1 wurde allerdings 1997 bereits von Todorčević und Abraham in [TA97] veröffentlicht und untersucht. Die PID ist nicht nur als eigenständiges kombinatorisches Prinzip von Interesse, sie hat insbesondere einige äußerst interessante Kosequenzen. Beispielsweise gelten unter PID:[1]

- Die Suslin-Hypothese,
- einige Eigenschaften von Hausdorff-gaps und kohärenten Folgen,
- *Jensen's square principle* gilt nicht für reguläre Kardinalzahlen $> \omega_1$,
- die Singuläre-Kardinalzahlen-Hypothese,
- $\mathfrak{b} \leq \omega_2$ (die analoge Aussage für $\mathfrak{c}$ ist bisher offen),
- $\theta^\omega = \theta$ für alle regulären Kardinalzahlen $\theta \geq 2^\omega$.

In Abschnitt 1 werden aus Notations- und Konventionsgründen die benötigten Grundlagen dargestellt. In Abschnitt 2 werden wir die Forcingordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ besprechen, welche wir die gesamte Arbeit durch verwenden werden, und mit dieser zeigen, dass PID aus dem Proper Forcing Axiom folgt. Abschnitt 3 widmet sich den $\mathbb{D}$-vollständigen Forcings und deren Iterationen, bevor wir in Abschnitt 4 schließlich mit Hilfe von superkompakten Kardinazahlen die Konsistenz von $\mathsf{PID} + \mathsf{GCH}$ und (ohne große Kardinalzahlen) $\mathsf{PID}_{\omega_1} + \mathsf{GCH}$ zeigen.

Eine Übersicht über die verwendeten Notationen findet sich außerdem nochmal in Tabelle 1 in Abschnitt 5.1. Seltsam anmutende Anglizismen (wie *properness*, *countable support* etc.) ergeben sich aus der ausschließlich englischsprachlichen verwendeten Literatur. Es erschien mir diesbezüglich vernünftiger, Begriffe ohne offensichtliches oder (in den entsprechenden Personenkreisen) übliches deutsches Pendant unübersetzt zu lassen.

Ich gehe prinzipiell davon aus, dass der Leser mit den grundlegenden Definitionen und Resultaten der axiomatischen Mengenlehre und des Forcings, wie sie z.B. in einer entsprechenden Einführungsvorlesung behandelt werden, vertraut ist.

[1] [Tod00],[MV10, S.10],[TCF$^+$14, S.90]

1 Grundlagen

1.1 Allgemeine Grundlagen

Definition 1.1. [2] Sei S eine beliebige Menge.

1. Ein System $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{P}(S)$ heißt *Ideal (über S)*, wenn $\mathcal{I}$ unter Teilmengen und endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, sowie $S \notin \mathcal{I}$.

2. Ein Ideal $\mathcal{I} \subseteq [S]^{\leq\omega}$ heißt *P-Ideal*, wenn es für jede abzählbare Familie $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ ein $A \in \mathcal{I}$ gibt so, dass $A_n \subseteq^* A$ für jedes $n \in \omega$.

3. Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{P}(S)$ beliebig. $T \subseteq S$ heißt *orthogonal* zu $\mathcal{I}$ (in Symbolen $T \perp \mathcal{I}$), wenn für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt $|T \cap I| < \omega$.

Die Menge A aus der Definition von P-Idealen wird auch als *Pseudovereinigung* bezeichnet (daher der Name *P-Ideal*). Man beachte außerdem, dass wir per Definition das triviale Ideal von vorneherein ausschließen, sowie dass P-Ideale ausschließlich abzählbare Mengen beinhalten.

Die P-Ideal-Dichotomie, die das zentrale Thema dieser Arbeit darstellt, ist die folgende Aussage:

PID (*P-Ideal Dichotomy*)[3] Für jedes P-Ideal $\mathcal{I}$ über S gilt eine der folgenden zwei Aussagen:

1. Es gibt ein überbzählbares $T \subseteq S$ so, dass $[T]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$;

2. Es gibt eine Zerlegung $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ so, dass jedes der S_n orthogonal zu $\mathcal{I}$ ist.

Ist T orthogonal zu $\mathcal{I}$ sagt man auch „T liegt *außerhalb* von $\mathcal{I}$“; gilt $[T]^{\omega} \subseteq \mathcal{I}$ sagt man auch „T liegt *innerhalb* von $\mathcal{I}$“. Eine häufige alternative Formulierung der PID ist daher auch:

> Entweder es gibt eine überabzählbare Menge innerhalb von $\mathcal{I}$, oder eine abzählbare Zerlegung von S in Mengen außerhalb von $\mathcal{I}$.

Die Einschränkung von PID auf Ideale über Grundmengen S der Mächtigkeit höchstens ω_1 bezeichnen wir mit PID_{ω_1}. Es ergibt Sinn, diese Aussage gesondert zu betrachten, da für die Konsistenz von PID_{ω_1} mit der Kontinuumshypothese nur wenige Forcingiterationen benötigt werden. Insbesondere benötigen wir keine großen Kardinalzahlen, um hinreichend oft iterieren zu dürfen, wie wir in Abschnitt 4.2 sehen werden.

Wir werden außerdem folgende Variationen der klassischen Begriffe *Club* und *Stationär* brauchen, welche in dieser Form auf Jech zurückgehen:

[2] [TCF+14, S.81ff]
[3] [TCF+14, S.88]

Definition 1.2. Sei S eine beliebige Menge und κ eine Kardinalzahl.

- Eine Teilmenge $X \subseteq [S]^\kappa$ heißt *konfinal* oder *unbeschränkt*, wenn für jedes $A \in [S]^\kappa$ ein $B \in X$ existiert so, dass $A \subseteq B$.
- Eine Teilmenge $X \subseteq [S]^\kappa$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\bigcup A \in [S]^\kappa$ gilt $\bigcup A \in X$.
- Eine Teilmenge $X \subseteq [S]^\kappa$ heißt *Club (in $[S]^\kappa$)*, wenn X konfinal und abgeschlossen ist.
- Eine Teilmenge $X \subseteq [S]^\kappa$ heißt *stationär (in $[S]^\kappa$)*, wenn X jeden Club in $[S]^\kappa$ schneidet.
- Die *Konfinalität von* $[S]^\kappa$ (mit $cf([S]^\kappa)$ bezeichnet) ist die kleinste Mächtigkeit einer konfinalen Teilmenge von $[S]^\kappa$.

Für diese Begriffe gelten die meisten Eigenschaften, die auch für „klassische“ Clubs und stationäre Mengen gelten (siehe z.B. [Jec73, S.179]); insbesondere gilt für geeignete *Regressivitäts*begriffe das *Pressing-Down-Lemma*. Wir werden dieses jedoch bei Bedarf für die konkrete gegebene Situation beweisen.

1.2 Forcingordnungen

Ich gehe davon aus, dass der Leser mit den Grundlagen der Forcing-Technik vertraut ist. Wir bezeichnen (informal) mit *Forcingordnung* jede Quasiordnung, die für Forcingzwecke verwendet werden soll. Wir schreiben $p \leq q$, wenn p eine *stärkere* Bedingung als q ist. Entsprechend definieren wir generische Filter auf Forcingordnungen:

Definition 1.3. Sei $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung.

- Zwei Elemente $p, q \in \mathcal{P}$ heißen *kompatibel*, wenn es ein $r \in \mathcal{P}$ gibt mit $r \leq p, q$ (in Symbolen: $p \parallel q$); ansonsten *inkompatibel* (in Symbolen $p \perp q$).
- Ein *Filter $G \subseteq \mathcal{P}$ über $\mathcal{P}$* ist eine Teilmenge so, dass gilt:
  - Wenn $p \in G$, dann $q \in G$ für alle $q \geq p$.
  - Für alle $p, q \in G$ gibt es ein $r \in G$ so, dass $r \leq p, q$.
- Eine Menge $D \subseteq \mathcal{P}$ heißt *dicht (in $\mathcal{P}$)*, wenn für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein $q \in D$ existiert so, dass $q \leq p$. Gibt es nur ein $q \in D$ mit $p \parallel q$, so heißt D *prädicht*. Eine Folge paarweise inkompatibler Elemente heißt *Antikette*. Eine Antikette heißt *maximal*, wenn jede Erweiterung keine Antikette mehr ist.
- Sei $\mathcal{D}$ eine Menge (prä-)dichter Mengen in $\mathcal{P}$. Ein Filter G über $\mathcal{P}$ heißt *$\mathcal{D}$-generisch*, wenn $G \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \mathcal{D}$.

- Sei M ein (meist abzählbares) Modell einer Teiltheorie von ZFC mit $\mathcal{P} \in M$. Ein Filter G heißt *M-generisch*, wenn G alle dichten Mengen in M schneidet.

  Äquivalent: wenn G alle maximalen Antiketten / alle prädichten Mengen in M schneidet.

- Wir bezeichnen mit $Gen_p(M, \mathcal{P})$ die Menge aller M-generischen Filter über $\mathcal{P}$, die p enthalten.

Mit $\dot{a}$ bezeichnen wir einen Namen für eine Menge a. Falls die Menge a gegeben, aber der Name es nicht ist, meinen wir damit per Default den *kanonischen* Namen. Mit dem kanonischen Namen des/eines generischen Filters $\dot{G}$ meinen wir entsprechend den Namen $\{(\dot{p}, p) \mid p \in \mathcal{P}\}$. Wir schreiben außerdem $\Vdash$ für die übliche Forcingrelation; $p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi$ bedeutet also „$p \in \mathcal{P}$ erzwingt φ“.

Die Menge aller $\mathcal{P}$-Namen in M bezeichnen wir mit $M^{\mathcal{P}}$; die Klasse *aller* $\mathcal{P}$-Namen mit $\mathbf{V}^{\mathcal{P}}$, wobei – wie üblich – $\mathbf{V}$ das „Hintergrund“-Universum bzw. das Ausgangsuniversum für eine Forcingerweiterung bezeichnet (wenn dieses nicht explizit ein inneres Modell ist).

Wenn wir sagen „In $\mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ gilt φ“ meinen wir damit, dass $1_{\mathcal{P}} \Vdash \varphi$ – ist der konkrete generische Filter mit dem wir eine Forcingerweiterung bilden nicht wichtig, unterscheiden wir also nicht zwischen der Menge der Namen und einer unspezifischen Forcingerweiterung.

Die Auswertung eines Namens τ unter einem bestimmten Filter G wiederum bezeichnen wir mit τ^G; die konkrete Forcingerweiterung eines Modells M mit $M[G]$. Mit X^M bzw. $X^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}}}$ bezeichnen wir die Menge X in dem Modell M bzw. in einer unspezifischen generischen Erweiterung $\mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ – ein Ausdruck wie $\kappa = \omega_2^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}}}$ ist also zu lesen als *„$\kappa \in \boldsymbol{V}$ wird beim forcen mit $\mathcal{P}$ auf die zweite überabzählbare Kardinalzahl kollabiert“*.

Iterationen von Forcingordnungen definieren wir folgendermaßen:

Definition 1.4.

- Sei $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung und $\dot{\mathcal{Q}} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ ein Name für eine weitere Forcingordnung. Die *Zweischritt-Iteration* $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ ist die Menge

$$\Big\{(p, \dot{q}) \mid p \in \mathcal{P} \wedge \exists r \in \mathcal{P}\ (\dot{q}, r) \in \dot{\mathcal{Q}} \wedge p \Vdash (\dot{q} \in \dot{\mathcal{Q}})\Big\}$$

  mit der Ordnung $(p, \dot{q}) \leq (p', \dot{q}') :\Leftrightarrow p \leq p' \wedge p \Vdash (\dot{q} \leq \dot{q}')$.

- Sei $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ eine Zweischritt-Iteration, G ein Filter über $\mathcal{P}$ und $H \subseteq \dot{\mathcal{Q}}$. Wir definieren

$$G * H = \big\{(p, q) \mid p \in G \wedge q^G \in H\big\}.$$

- Eine *countable support Iteration* ist eine Folge $(\mathcal{P}_i, \dot{\mathcal{Q}}_i)_{i \leq \kappa}$ so, dass gilt:
  - Jedes $\mathcal{P}_i$ ist eine Forcingordnung bestehend aus Folgen der Länge i,
  - für jedes $p \in \mathcal{P}_i$ und $j < i$ ist $p \restriction j \in \mathcal{P}_j$,
  - jedes $\dot{\mathcal{Q}}_i$ ist ein $\mathcal{P}_i$-Name für eine Forcingordnung,
  - für jede Folge $(p_j)_{j<i} \in \mathcal{P}_i$ und jedes $j < i$ gibt es ein $r \in \mathcal{P}_j$ so, dass $(p_j, r) \in \dot{\mathcal{Q}}_i$,

- $1_{\mathcal{P}_i} = (1_{\dot{\mathcal{Q}}_j})_{j<i} \in \mathcal{P}_i$ für jedes i (wobei $1_{\mathcal{R}}$ jeweils das größte Element der Forcingordnung $\mathcal{R}$ bezeichnet),

wobei die einzelnen Ordnungen $\mathcal{P}_i$ (rekursiv) wie folgt definiert sind:

- $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$,
- es gilt $p = (q_j)_{j<i+1} \in \mathcal{P}_{i+1}$ genau dann, wenn $p \restriction i \in \mathcal{P}_i$, es ein $r \in \mathcal{P}_i$ gibt mit $(q_i, r) \in \dot{\mathcal{Q}}_i$ und $p \restriction i \Vdash (q_i \in \dot{\mathcal{Q}}_i)$,
- für $p = (q_j)_{j<i+1}$ und $(q'_j)_{j<i+1} = p'$ gilt $p \leq p'$ genau dann, wenn $p \restriction i \leq p' \restriction i$ und $p \restriction i \Vdash (q_i \leq q'_i)$,
- für alle $p = (q_j)_{j<\lambda}$ für eine Limeszahl λ gilt $p \in \mathcal{P}_\lambda$ genau dann, wenn für alle $j < \lambda$ gilt $p \restriction j \in \mathcal{P}_j$ und für *alle bis auf abzählbar viele* Elemente q_j gilt $q_j = 1_{\dot{\mathcal{Q}}_j}$.
  Für $p', p \in \mathcal{P}_\lambda$ gilt $p \leq p'$ genau dann, wenn für alle $j < \lambda$ gilt $p \restriction j \leq p' \restriction j$.

Wir sagen $\mathcal{P}$ *hat die κ-chain-condition (κ-c.c.)*, wenn es in $\mathcal{P}$ keine Antikette der Länge κ gibt. Diese Eigenschaft wird häufig gebraucht, um folgendes Reultat auszunutzen:

Lemma 1.1. [4] *Sei $\mathcal{P}$ eine κ-c.c.-Forcingordnung und κ eine reguläre Kardinalzahl. Dann erhält forcen mit $\mathcal{P}$ alle Kardinalzahlen $\geq \kappa$.*

Für den Beweis brauchen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 1.2. [5] *Sei $\mathcal{P} \in M$ eine κ-c.c.-Forcingordnung, G ein generischer Filter, $A, B \in \boldsymbol{V}$ und $f \in \boldsymbol{V}[G]$ mit $f : A \to B$. Dann gibt es eine Funktion $F \in \boldsymbol{V}$ mit $F : A \to \mathfrak{P}(B)$ so, dass $f(a) \in F(a)$ und $\boldsymbol{V} \models |F(a)| < \kappa$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Sei $\dot{f} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ ein Name für die Funktion f. Dann gibt es also ein $p \in G$ so, dass $p \Vdash (\dot{f} : \dot{A} \to \dot{B})$. Definiere $F(a) = \left\{ b \in B \mid \exists q \leq p \; q \Vdash (\dot{f}(\dot{a}) = \dot{b}) \right\}$. Dann ist F also in $\mathbf{V}$ definierbar. Sei $b = f(a)$ für irgendein $a \in A$. Dann gibt es also ein $q \in G$ mit $q \Vdash (\dot{f}(\dot{a}) = b)$ und q, p haben eine gemeinsame Erweiterung in G, also können wir $q \leq p$ wählen und es folgt $b \in F(a)$.

Mit dem Auswahlaxiom finden wir eine Funktion $F' : F(a) \to \mathcal{P}$ in $\mathbf{V}$ so, dass für $b \in F(a)$ gilt $F'(b) \leq p$ und $F'(b) \Vdash (\dot{f}(\dot{a}) = \dot{b})$. Für ungleiche $b, b' \in F(a)$ gilt dann natürlich $F'(b) \perp F'(b')$, womit $\{F'(b) \mid b \in F(a)\}$ eine Antikette in $\mathcal{P}$ bildet; nach κ-c.c. folgt also $\mathbf{V} \models |F(a)| < \kappa$. □

Beweis Lemma 1.1. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{P}$ die Eigenschaft „θ ist regulär“ für Kardinalzahlen $\geq \kappa$ erhält. Angenommen, dass nicht; dann gibt es also eine reguläre Kardinalzahl $\theta \geq \kappa$ so, dass $\mathbf{V}^{\mathcal{P}} \models$„$\theta$ ist nicht regulär“. Entsprechend gibt es ein $\alpha < \theta$ und eine zugehörige konfinale Abbildung $f : \alpha \to \theta$ in $\mathbf{V}^{\mathcal{P}}$. Nach dem vorherigen Lemma gibt es

[4] [Kun92, S.213]
[5] [Kun92, S.212]

also eine Abbildung $F \in \mathbf{V}$ mit $F : \alpha \to \mathfrak{P}(\theta)$ mit den dort bewiesenen Eigenschaften. Sei $X = \bigcup_{i \leq \alpha} F(i)$, dann ist X eine unbeschränkte Teilmenge von θ in $\mathbf{V}$, aber $|X| \leq \alpha \cdot \sup_{i \leq \alpha} F(i) < \theta$ (weil κ regulär und $F(i) < \kappa$), Widerspruch zur Regularität von θ.

Somit erhält $\mathcal{P}$ auch alle Konfinalitäten $\geq \kappa$, da wenn $cf(\alpha) = \gamma$ und $f : \gamma \to \alpha$ die entsprechende streng monoton wachsende konfinale Abbildung ist, $\gamma^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}}}$ also ebenfalls regulär ist und $f \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$, also $\mathbf{V}^{\mathcal{P}} \models (\gamma = cf(\alpha))$.

Nach Vorraussetzung ist κ regulär, daher gilt nun $cf(\kappa)^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}}} = cf(\kappa) = \kappa$, und entsprechend natürlich auch für jede reguläre Kardinalzahl $> \kappa$. Für Limeskardinalzahlen $\lambda > \kappa$ hingegen sind die regulären Kardinalzahlen $< \lambda$ unbeschränkt in λ und bleiben erhalten; womit auch $\lambda^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}}}$ eine Limeskardinalzahl ist. $\square$

Um die κ-c.c. bei unserer Iterationen in Abschnitt 4 zu erhalten werden wir folgendes Lemma brauchen:

Lemma 1.3. [6] *Sei κ regulär mit $\mu^\omega < \kappa$ für alle $\mu < \kappa$ und $(\mathcal{P}_i, \dot{Q}_i)_{i \leq \kappa}$ eine countable support Iteration so, dass für jedes $i \leq \kappa$ gilt:*

$$1_{\mathcal{P}_i} \Vdash \text{„}\dot{Q}_i \textit{ ist eine propere Forcingordnung mit Mächtigkeit } < \kappa\text{“}.$$

Dann hat $\mathcal{P}_\kappa$ die κ-c.c.

Der Beweis ist nicht schwer, aber für unsere Zwecke unverhältnismäßig umfangreich und entsprechend hier nicht gegeben.

Außerdem werden wir Δ-Systeme und den Δ-System-Satz brauchen:

Definition 1.5. [7] Eine Menge $\mathcal{A}$ heißt Δ-*System*, wenn es eine Menge r (gennant *Wurzel* von $\mathcal{A}$) gibt so, dass $a \cap b = r$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$.

Satz 1.4. [8] ***(Δ-System-Satz)*** *Sei $\kappa \geq \omega$ und $\theta > \kappa$ regulär mit $|^{<\kappa}\mu| < \theta$ für alle $\mu < \theta$. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Menge mit $|\mathcal{A}| \geq \theta$ und $|a| < \kappa$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Dann gibt es ein Δ-System $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit θ.*

Beweis. o.B.d.A. sei $|\mathcal{A}| = \theta$. Da θ regulär gilt $\bigcup \mathcal{A} \leq \theta$ und wir können annehmen, dass $\mathcal{A}$ aus Teilmengen von θ besteht. Somit gibt es (wieder wegen Regularität) ein $\beta < \kappa$ so, dass $\mathcal{A}_1 := \{a \in \mathcal{A} \mid \mathsf{otp}(a) = \beta\}$ Mächtigkeit θ hat. Nachdem $|^{<\kappa}\mu| < \theta$ für alle $\mu < \theta$ folgt, dass jeweils weniger als θ viele Elemente von $\mathcal{A}_1$ Teilmengen von μ sind für jedes $\mu < \theta$, also ist $\bigcup \mathcal{A}_1$ in θ unbeschränkt. Sei für $a \in \mathcal{A}_1$ und $\xi < \beta$ mit a_ξ das ξ-te Element von a bezeichnet. Dann gibt es also ein kleinstes ξ so, dass $\{a_\xi \mid a \in \mathcal{A}_1\}$ ebenfalls unbeschränkt in θ ist. Definiere $\alpha = \sup \{a_\eta + 1 \mid a \in \mathcal{A}_1 \wedge \eta < \xi\}$, dann gilt $\alpha_0 < \theta$ und $a_\eta < \alpha$ für alle $a \in \mathcal{A}_1, \eta < \xi$.

Wir wählen nun rekursiv für jedes $\mu < \theta$ ein $a_\mu \in \mathcal{A}_1$ so, dass $a_\mu(\xi) > \alpha$ und $a_\mu(\xi) > a_\nu(\eta)$ für alle $\eta < \beta$ und $\nu < \mu$. Setze jetzt $\mathcal{A}_2 = \{a_\mu \mid \mu < \theta\}$. Dann gilt also

[6] [She98, S.118f]
[7] [Kun92, S.49]
[8] ibd.

$|\mathcal{A}_2| = \theta$ und $a \cap b \subseteq \alpha$ für alle ungleichen $a, b \in \mathcal{A}_2$. Nachdem $|^{<\kappa}\alpha| < \theta$ muss ein $r \subseteq \alpha$ für eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_2$ der Mächtigkeit θ bei jedem paarweisen Schnitt auftauchen, womit $\mathcal{B}$ ein Δ-System ist. $\square$

2 PID und das Proper Forcing Axiom

Sei für den Rest dieser Arbeit $\mathcal{I}$ ein beliebiges P-Ideal über einer überabzählbaren Ordinalzahl S so, dass Bedingung (2) aus PID verletzt ist; es gebe also keine abzählbare Zerlegung von S in zu $\mathcal{I}$ orthogonale Mengen. Unser Ziel ist somit, Bedingung (1) der PID zu forcen.

Bemerkung 2.1. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass eine abzählbare Zerlegung für *jede kleinere Ordinalzahl* existiert (wenn nicht, betrachte $\mathcal{I}$ eingeschränkt auf diese kleinere Zahl), und somit, dass S überabzählbare Konfinalität hat – sonst wäre mit einer abzählbaren Zerlegung jeden Elementes einer abzählbaren konfinalen Teilmenge Bedingung (2) erfüllt. Wir können außerdem annehmen, dass $\mathcal{I}$ alle endlichen Teilmengen von S enthält, da wir sonst o.B.d.A. zu $S' = \mathsf{otp}(\{x \in S \mid \{x\} \in \mathcal{I}\})$ übergehen können.

2.1 Die Forcingordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$

Wir werden nun eine Forcingordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ definieren, die eine überabzählbare Teilmenge $T \subseteq S$ erzwingt, welche $[T]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$ erfüllt. Diese Ordnung wird sich als proper und als $\mathbb{D}$-vollständig – und somit für alle Ziele dieser Arbeit geeignet – erweisen.

Um den Überblick über die „Ebenen“ von Mengen zu vereinfachen, orientiere ich mich ab nun weitestgehend an der folgenden notationellen Konvention:

- $\alpha, \beta, \gamma, ...$ sind Elemente aus S,
- x, y, z sind Teilmengen von S,
- A, B, C sind *Mengen* von Teilmengen von S (wie z.B. Teilmengen von $\mathcal{I}$),
- X, Y, Z befinden sich eine Ebene höher (wie z.B. Teilmengen von $[\mathcal{I}]^\omega$) und
- $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ liegen noch eine weitere Ebene höher (wie z.B. Systeme von Teilmengen von $[\mathcal{I}]^\omega$).

Ein Beispiel für diese Konvention wäre eine $\in$-Kette $\beta \in z_A \in A \in X_\beta \in \mathcal{X}_p \in \mathfrak{P}^4(S)$.

Definition 2.1. [9]**(Die Ordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$)**

- Sei $<_I$ eine feste Wohlordnung von $\mathcal{I}$. Für jedes $A \in [\mathcal{I}]^\omega$ sei z_A das bezüglich $<_I$ kleinste Element so, dass:

  (i) Für alle $x \in A$ gilt $x \subseteq^* z_A$ und

  (ii) $z_A \subseteq \bigcup A$.

  Bedingung (i) lässt sich nach Definition von P-Idealen immer erfüllen, und gilt Bedingung (i) für z_A, dann gelten beide Bedingungen trivialerweise für $z_A \cap \bigcup A$.

  Die Wohlordnung dient der Eindeutigkeit und Definierbarkeit der z_A in allen später betrachteten Modellen.

[9] [Tod00, S.260]

- Die Forcingordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ besteht aus allen Paaren $p = (x_p, \mathcal{X}_p)$ so, dass:

  (iii) $x_p \in [S]^\omega$,

  (iv) $\mathcal{X}_p$ ist eine abzählbar unendliche Menge *konfinaler Teilmengen von* $[\mathcal{I}]^\omega$.

  Wir ordnen $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ folgendermaßen: Es gelte $q \leq p$ genau dann, wenn:

  (v) $x_p \subseteq x_q$ und für alle $\alpha \in x_q \setminus x_p$ und $\beta \in x_p$ gilt $\beta < \alpha$ (d.h. x_q ist eine *Enderweiterung* von x_p),

  (vi) $\mathcal{X}_p \subseteq \mathcal{X}_q$ und

  (vii) für jedes $X \in \mathcal{X}_p$ gilt $\{A \in X \mid x_q \setminus x_p \subseteq z_A\} \in \mathcal{X}_q$; insbesondere ist die Menge also konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$.

Für das tatsächliche Forcing und in späteren Beweisen werden wir Gebrauch von den folgenden dichten Mengen machen:

Lemma 2.1. [10] *Die Menge* $\{p \in \mathcal{P}_\mathcal{I} \mid x_p \setminus \gamma \neq \emptyset\}$ *ist dicht in* $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ *für jedes* $\gamma \in S$.

Beweis. Sei $p \in \mathcal{P}_\mathcal{I}$ mit $x_p \setminus \gamma = \emptyset$ für irgendein $\gamma \in S$. Wähle $\beta > \gamma$ beliebig und betrache $x_p \cup \{\beta\} =: x_q$. Wenn für jedes $X \in \mathcal{X}_p$ die Menge

$$\{A \in X \mid x_q \setminus x_p \subseteq z_A\} = \{A \in X \mid \beta \in z_A\} =: X_\beta$$

konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist, dann folgt mit Kriterium (vii) $(x_q, \mathcal{X}_p \cup \{X_\beta \mid X \in \mathcal{X}_p\}) \leq p$ und wir haben unsere Erweiterung gefunden. Nehmen wir also an, dass für jedes $\beta > \gamma$ ein $X \in \mathcal{X}_p$ existiert so, dass die Menge X_β *nicht* konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist.

Sei entsprechend für jedes $X \in \mathcal{X}_p$ nun y_X die Menge aller $\beta \in S \setminus \gamma$, für die X_β nicht konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist und nehmen wir an, dass die Familie $(y_X)_{X \in \mathcal{X}_p}$ ganz $S \setminus \gamma$ überdeckt. $\mathcal{X}_p$ ist abzählbar; wenn wir zeigen können, dass jedes y_X orthogonal zu $\mathcal{I}$ ist (und weil nach Bemerkung 2.1 eine abzählbare Zerlegung von $\gamma < S$ in zu $\mathcal{I}$ orthogonale Mengen existiert), haben wir also einen Widerspruch zur Annahme, dass Bedingung (2) der PID nicht gilt.

Nehmen wir also an, dass für ein $X \in \mathcal{X}_p$ die Menge $y = y_X \cap I$ unendlich ist für irgendein $I \in \mathcal{I}$. Es gilt nun:

Behauptung. *Es gibt eine endliche Menge* $y_0 \subset y$ *so, dass die Menge*

$$Y = \{A \in X \mid y \setminus y_0 \subseteq z_A\}$$

konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ *ist.*

Beweis. Wir überlegen zunächst, dass $cf([\mathcal{I}]^\omega) > \omega$: Dies folgt daraus, dass das Supremum jeder (potentiell konfinalen) abzählbaren Teilmenge wieder abzählbar ist und somit in $[\mathcal{I}]^\omega$ liegt. Aber da $\mathcal{I}$ alle endlichen Teilmengen von S enthält, folgt $|\mathcal{I}| \geq S$

[10] [Tod00, S.260]

und somit lässt sich jedes Element in $[\mathcal{I}]^\omega$ erweitern; eine abzählbare Teilmenge kann ergo nicht konfinal sein.

Nachdem X konfinal ist, ist außerdem auch die Menge $Y' = \{A \in X \mid y \in A\}$ konfinal; für jedes $A \in Y'$ gilt somit $y \subseteq^* z_A$. Setze also $y_A := y \setminus z_A$. Als endliche Teilmenge von y gibt es somit nur abzählbar viele verschiedene y_A. Setze $Y_z := \{A \in Y' \mid y_A = z\}$, dann gilt $Y' = \bigcup_{z \in [y]^{<\omega}} Y_z$, also muss ein y_A konfinal oft (in Y') vorkommen. □

Für jedes $\beta \in y \setminus y_0$ ist also X_β nicht konfinal, aber $Y \subseteq X_\beta$ schon, Widerspruch. □

Hieraus folgt nun, dass diese Ordnung tatsächlich das tut, was sie soll:

Korollar 2.2. *$\mathcal{P}_\mathcal{I}$ erzwingt die Existenz einer überabzählbaren Menge $T \subseteq S$ so, dass $[T]^\omega \subseteq \mathcal{I}$.*

Beweis. Sei ein generischer Filter G gegeben, der die dichten Mengen aus Lemma 2.1 schneidet und wähle $p_0 \in G$ beliebig. Betrachte nun $T := \left(\bigcup_{p \in G} x_p\right) \setminus x_{p_0}$. Nachdem stärkere Bedingungen Enderweiterungen darstellen (und alle Elemente in G kompatibel sind) ist x_{p_0} nur ein abzählbares Anfangsstück von $\bigcup_{p \in G} x_p$; insbesondere ist T also überabzählbar.

Sei nun $t \in [T]^\omega$ beliebig; dann gibt es entsprechend ein $p \in G$ so, dass $t \subseteq x_p \setminus x_{p_0}$; wegen Kompatibilität können wir o.B.d.A. $p \leq p_0$ annehmen. Dann folgt mit Kriterium (vii), dass für irgendwelche $A \in X \in \mathcal{X}_{p_0}$ gilt $t \subseteq x_p \setminus x_{p_0} \subseteq z_A \in \mathcal{I}$ und somit $t \in \mathcal{I}$. □

2.2 PFA und $\mathcal{P}_\mathcal{I}$

Wir wenden uns nun den proper Forcings und dem *Proper Forcing Axiom* zu, welches uns die Konsistenz von $\mathsf{PID} + \neg\mathsf{GCH}$ liefert. Die Eigenschaften von proper Forcingordnungen sind in der Literatur ausführlich abgedeckt (siehe z.B. [Abr10] oder [She98]) und gehören zum Grundhandwerkszeug der modernen Mengenlehre; entsprechend werden wir die grundlegenden benötigten Resultate nicht ausführlich diskutieren. Stattdessen gebe ich nur die benötigten Definitionen und Resultate an und verweise für Details auf die genannte Literatur.

Der Beweis, dass $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ proper ist, verwendet dabei die folgende Definition:

Definition 2.2. [11]

- Sei $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung und M eine abzählbare elementare Unterstruktur eines hinreichend großen H_θ mit $\mathcal{P} \in M$. Eine Bedingung $p \in \mathcal{P}$ heißt *M-generisch*, wenn für jede offene dichte (äquivalent: prädichte) Menge $D \in M$ gilt: Jeder M-generische Filter, der p enthält, schneidet auch $D \cap M$.
- Eine Forcingordnung $\mathcal{P}$ heißt *proper*, wenn für jede geeignete abzählbare elementare Unterstruktur M eines hinreichend großen H_θ und jedes $p \in \mathcal{P} \cap M$ ein M-generisches $q \leq p$ exisiert.

Das Proper Forcing Axiom besagt nun:

PFA (*proper forcing axiom*) Zu jeder proper Forcingordnung $\mathcal{P}$ und jeder Familie $\mathcal{D}$ von höchstens ω_1 vielen dichten Mengen gibt es einen Filter, der alle Mengen in $\mathcal{D}$ schneidet.

Um PFA auszunutzen müssen wir natürlich zunächst zeigen:

Satz 2.3. [12] *$\mathcal{P}_\mathcal{I}$ ist proper.*

Bemerkung 2.2. Bevor wir uns dem eigentlichen Beweis zuwenden sei angemerkt, dass wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch stärkere Eigenschaften als nur proper für $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ zeigen müssen werden (nämlich $\mathbb{D}$-Vollständigkeit und α-properness für jedes $\alpha < \omega_1$). Entsprechend werden wir den Beweis so führen, dass er uns später als Ausgangspunkt für eine Induktion dienen kann. Außerdem werden wir in späteren Argumenten häufig auf die hier verwendete Konstruktionsmethode verweisen und diese nur jeweils geringfügig anpassen; der folgende Beweis enthält also *das* zentrale Kernargument mehrerer späterer Beweise.

Beweis. Satz 2.3. Seien also ein abzählbares $M \prec H_\kappa$ für hinreichend großes κ und $p_0 \in M \cap \mathcal{P}_\mathcal{I}$ gegeben.[13] Unser Ziel ist es, eine M-generische Erweiterung $q \leq p_0$ zu

[11] [Tod00, S.259]
[12] [Tod00, S.260]
[13] Wir gehen jetzt und in allen späteren Beweisen immer davon aus, dass unsere Modelle $M \prec H_\theta$ jeweils alle benötigten Objekte (wie $\mathcal{I}, \mathcal{P}, <_I$ etc.) enthalten.

finden. Hierfür wählen wir zunächst eine Abzählung $(D_n)_{n\in\omega}$ aller offenen dichten Mengen aus M und konstruieren induktiv eine Folge von Bedingungen $p_n = (x_n, \mathcal{X}_n)$ so, dass $p_{n+1} \in D_n \cap M$ für alle $n \in \omega$. Wenn wir anschließend eine gemeinsame Erweiterung q aller p_n finden sind wir also fertig.

Wegen Bemerkung 2.2 betrachten wir zunächst eine beliebige Menge $z \subseteq M \cap S$ mit der Eigenschaft, dass für alle $I \in \mathcal{I} \cap M$ gilt $I \subseteq^* z$ (nachdem $\mathcal{I}$ ein P-Ideal ist, gibt es so eine Menge, aber wir fordern nicht zwangsläufig, dass $z \in \mathcal{I}$!) und konstruieren die Folge $(p_n)_{n\in\omega}$ so, dass für $x_\omega := \bigcup_{n\in\omega} x_n$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $x_\omega \setminus x_0 \subseteq z$,

(b) Für jedes $n \in \omega$ und $X \in \mathcal{X}_n$ ist die Menge $Z_{X,n} := \{A \in X \mid x_\omega \setminus x_n \subseteq z_A\}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$.

Wenn dann außerdem x_{n+1} eine Enderweiterung von x_n ist (was nach Konstruktion der Fall sein wird), liefert uns Bedingung (b), dass Bedingung (vii) für

$$q := (x_\omega, \{Z_{X,n} \mid n \in \omega, X \in \mathcal{X}_n\} \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{X}_n)$$

erfüllt ist und somit $q \leq p_n$ für alle $n \in \omega$ gilt; Bedingung (a) werden wir später brauchen.

Sei also p_n bereits gegeben und $X \in \mathcal{X}_n$ beliebig. Unsere Folge muss so konstruiert sein, dass ein $m > n$ existiert so, dass die Konstruktion der folgenden Bedingungen $p_{m+1}, p_{m+2}, ...$ die Gültigkeit von Bedingung (b) für dieses X garantiert. Überlegen wir also, welche Eigenschaften dieses p_m haben muss:

Natürlich muss $p_m \leq p_n$ gelten und somit nach Bedingung (vii) die Menge $X_1 := \{A \in X \mid x_m \setminus x_n \subseteq z_A\}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ sein. Nachdem $\mathcal{I}$ ein P-Ideal ist, gibt es dann ein $z_M \subseteq M \cap S$ in $\mathcal{I}$ so, dass für alle $I \in \mathcal{I} \cap M$ gilt $I \subseteq^* z_M$. Analog zur Behauptung im Beweis von Lemma 2.1 können wir nun argumentieren, dass wenn X_1 konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist, wir eine *endliche* Menge $c_M \subseteq S \cap M$ finden so, dass auch $X_2 = \{A \in X_1 \mid z_M \subseteq z_A \cup c_M\}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist.

Wenn wir also eine Erweiterung $p_{m+1} \leq p_m$ in $D_m \cap M$ finden so, dass

$$x_{m+1} \setminus x_m \subseteq (z_M \cap z) \setminus c_M$$

gilt (und das selbe für $x_{i+1} \setminus x_i$ für alle $i \geq m$), folgt $X_2 \subseteq Z_{X,n}$ und somit ist $Z_{X,n}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ und $x_{m+1} \setminus x_m \subseteq z$; es sind also beide Bedingungen erfüllt. Wir können uns also (wegen z_M) o.B.d.A. auf den Fall $z \in \mathcal{I}$ beschränken und es reicht, die folgenden beiden Bedingungen zu erfüllen:

(a') $p_{n+1} \in D_n \cap M$,

(b') $x_{n+1} \setminus x_n \subseteq z$.

Nehmen wir also an, dass so eine Erweiterung p_{n+1} nicht existiert und sei entsprechend Y_0 die Menge aller $A \in [\mathcal{I}]^\omega$ so, dass für irgendeine endliche Menge $c_A \subseteq z_A$ kein $p \in D_n$ mit $p \leq p_n$ existiert so, dass

$$x_p \setminus x_n \subseteq z_A \setminus c_A. \qquad (*)$$

Wegen Definierbarkeit gilt $Y_0 \in M$ und (wenn wir $c_A = z_A \setminus z$ wählen) folgt, dass jedes $A \in [\mathcal{I}]^\omega \cap M$ in Y_0 liegt. Wegen Elementarität von M folgt somit $Y_0 = [\mathcal{I}]^\omega$. Wir können nun den Beweis des Pressing-Down-Lemmas minimal anpassen um zu folgern:

Behauptung. *Es gibt ein endliches $c_0 \in M$ und eine stationäre Menge $Z \subseteq [\mathcal{I}]^\omega$ in M so, dass für alle $A \in Z$ gilt $c_0 = c_A$ (wie in (*)).*[14]

Beweis. Nachdem für jedes $A \in [\mathcal{I}]^\omega$ gilt $c_A \subseteq z_A \subseteq \bigcup A$, gibt es eine endliche Teilmenge $B_A \subseteq A$ mit $c_A \subseteq \bigcup B_A$. Betrachte also die Abbildung $f : A \mapsto B_A$.

Angenommen, f ist auf keiner stationären Teilmenge von $[\mathcal{I}]^\omega$ konstant; dann gibt es also für jedes $B \in [\mathcal{I}]^{<\omega}$ einen Club $C_B \subseteq [\mathcal{I}]^\omega$ so, dass $C_B \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Sei $C = \Delta_{B \in [\mathcal{I}]^\omega} C_B = \{A \in [\mathcal{I}]^\omega \mid \forall B \in [A]^{<\omega}\ A \in C_B\}$ der Diagonalschnitt der C_B. Der übliche Beweis, dass der Diagonalschnitt über Clubs wieder ein Club ist lässt sich problemlos an unsere Situation anpassen,[15] womit C ein Club ist.

Sei nun $A \in C$ beliebig; dann gilt wegen $B_A \in [A]^{<\omega}$ also $A \in C_{B_A}$, aber wegen Definition von $C_{B_A} \cap f^{-1}(B_A) = \emptyset$ auch $A \notin C_{B_A}$, Widerspruch. f ist also auf einer stationären Menge $Z' \subseteq [\mathcal{I}]^\omega$ konstant.

Sei entsprechend $f(A) = B$ für alle $A \in Z'$ und betrachte für $c \in [\bigcup B]^{<\omega}$ die Menge $Z_c = \{A \in Z \mid c_A = c\}$. Nachdem $[\bigcup B]^{<\omega}$ abzählbar ist, lässt sich somit Z' mit abzählbar vielen Z_c überdecken. Wieder lässt sich der übliche Beweis, dass die Vereinigung weniger (abzählbar vieler) nicht-stationärer Mengen ebenfalls nicht-stationär ist, ohne Schwierigkeiten an diese Situation anpassen;[16] womit eines der $Z_c = Z$ stationär sein muss. □

Betrachte nun $q_1 := (x_m, \mathcal{X}_m \cup \{Z\})$; dann gilt $q_1 \leq p_n$, $q_1 \in \mathcal{P}_\mathcal{I} \cap M$ und nach Lemma 2.1 (bzw. dessen Beweis) gibt es ein $\beta > \max(x_n \cup c_0)$ so, dass

$$q_2 := (x_n \cup \{\beta\}, \mathcal{X}_{q_1} \cup \{\{A \in X \mid \beta \in z_A\} \mid X \in \mathcal{X}_{q_1}\})$$

eine Erweiterung von q_1 ist und (wenn wir das Lemma direkt in M anwenden) in M liegt. Wegen der Dichtheit von D_n finden wir wiederum eine Erweiterung $q_3 \leq q_2$ in $D_n \cap M$ und wegen $Z \in \mathcal{X}_{q_2}$ und Bedingung (vii) folgt, dass $Z' := \{A \in Z \mid x_{q_3} \setminus x_n \subseteq z_A\}$ in $\mathcal{X}_{q_3}$ liegt und somit konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist.

Wähle nun irgendein $A \in Z'$. Nach Bedingung (v) ist x_{q_3} eine Enderweiterung von $x_{q_2} = x_n \cup \{\beta\}$, und nach Wahl von β ist somit $(x_{q_3} \setminus x_n) \cap c_0 = \emptyset$. Nach Bedingung (vii) gilt somit $x_{q_3} \setminus x_n \subseteq z_A \setminus c_0$; wir hatten aber angenommen, dass c_0 ein Zeuge ist dafür, dass $A \in Y_0$ gilt – Widerspruch zu (*).

Somit finden wir ein gewünschtes p_{n+1} und können die Folge $(p_n)_{n \in \omega}$ wie gefordert konstruieren. □

[14] Vielen Dank an Brian M. Scott für die Erläuterung dieses Beweisschrittes.
[15] Siehe z.B. [Jec73, S.179, Theorem 3.2.(c)]
[16] [Jec73, S.179, Theorem 3.2.(b)]

Somit folgt:

Korollar 2.4. *PFA $\Rightarrow$ PID.*

Beweis. Wir dürfen, um PFA auszunutzen zu können, nur ω_1 viele dichte Mengen verwenden. Nach Lemma 2.1 und wegen $cf(S) \geq \omega_1$ folgt aber (dank der Konstruktion aus dem vorherigen Beweis), dass auch die Menge

$$D_\alpha = \{p \in \mathcal{P}_\mathcal{I} \mid \mathsf{otp}(x_p) \geq \alpha\}$$

für jedes $\alpha \in \omega_1$ dicht ist. Sei also ein Filter G gegeben, der alle D_α schneidet, dann folgt die Behauptung aus Korollar 2.2. □

Für den üblichen Konsistenzbeweis von $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PFA}$ werden superkompakte Kardinalzahlen benötigt,[17] und es ist allgemein bekannt, dass unter PFA gilt $2^\omega = \omega_2$. Wir haben also gezeigt:

Korollar 2.5. *$Con(\mathsf{ZFC} + \mathsf{SC}) \Rightarrow Con(\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{GCH} + \mathsf{PID})$.*

[17] [Abr10, S.388]

3 $\mathbb{D}$-vollständige Forcingordnungen

Um die Konsistenz von PID mit der Kontinuumshypothese zu zeigen werden wir ausnutzen, dass unsere Forcingordnung $\mathbb{D}$-vollständig bezüglich eines einfachen ω-vollständigen Completeness-Systems ist. Derartige Forcingordnungen haben die schöne Eigenschaft, iteriert werden zu können ohne neue reelle Zahlen hinzuzufügen. Wir können somit ein Basismodell von $\mathsf{ZFC} + \mathsf{GCH}$ wählen und $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ über alle P-Ideale iterieren, ohne $2^\omega = \omega_1$ und (wie sich zeigen wird) die verallgemeinerte Kontinuumshypothese im Iterationsverlauf zu zerstören.

Zunächst wenden wir uns aber den hierfür benötigten α-properen Forcings zu.

3.1 α-Properness

α-Properness ist eine natürliche Verstärkung von Properness, die wir benötigen werden, um die später eingeführte $\mathbb{D}$-Vollständigkeit bei der Iteration zu erhalten. Definiert ist sie folgendermaßen:

Definition 3.1. [18]

- Sei α eine abzählbare Ordinalzahl. Eine Folge $M_0 \prec ... \prec M_\alpha \prec H_\theta$ abzählbarer elementarer Unterstrukturen von H_θ für hinreichend großes θ heißt *α-Turm*, wenn für alle i gilt $(M_j)_{j<i} \in M_i$ und für jede Limeszahl $\delta < \alpha$ gilt $M_\delta = \bigcup_{i<\delta} M_i$.

- Eine Forcingordnung $\mathcal{P}$ heißt *α-proper*, wenn für jeden α-Turm $(M_i)_{i\leq\alpha} =: \overline{M}$ mit $\mathcal{P} \in M_0$ und für jedes $p \in \mathcal{P} \cap M_0$ ein $q \leq p$ existiert, das gleichzeitig M_i-generisch ist für alle $i \leq \alpha$.

  So ein q heißt auch kurz *$\overline{M}$-generisch.*

- Eine Forcingordnung heißt *$< \omega_1$-proper*, wenn sie α-proper für jedes $\alpha < \omega_1$ ist.

Offensichtlich ist das klassische proper genau 1-proper nach dieser Definition. Beispielsweise ist jede ccc- oder σ-abgeschlossene Ordnung $< \omega_1$-proper.[19]

Bemerkung 3.1. Sei $\mathcal{P}$ eine α-propere Forcingordnung, $\overline{M}$ ein α-Turm und $M_\alpha \prec M_{\alpha+1}$. Dann lässt sich ein $\overline{M}$ generisches Element p zu einem $M_{\alpha+1}$-generischen Element erweitern – aus α-proper folgt somit $(\alpha + 1)$-proper.

Genauso folgt, dass jede Forcingordnung, die α_1- und α_2-proper ist, auch $(\alpha_1 + \alpha_2)$-proper ist. Wir könnten uns in Beweisen von $< \omega_1$-Properness somit auf unzerlegbare Limeszahlen beschränken (bestünde unsere Induktionshypothese im entsprechenden Beweis nicht noch aus zusätzlichen Forderungen).

Damit α-propere Ordnungen (und insbesondere $< \omega_1$-propere) sinnvoll iteriert werden können, müssen wir natürlich zunächst zeigen, dass α-Properness bei countable support Iterationen erhalten bleibt. Dies folgt direkt aus dem *α-Extensionslemma*:

[18][She98, S.206f],[Abr10, S.369]
[19][Abr10, S.370]

Lemma 3.1. [20]**(α-Extension Lemma)** *Sei α eine abzählbare Ordinalzahl und $(\mathcal{P}_i)_{i\leq\gamma}$ eine countable support Iteration von α-properen Forcingordnungen. Sei weiterhin λ eine hinreichend große Kardinalzahl und $\overline{M}$ ein $(\alpha+1)$-Turm abzählbarer elementarer Unterstrukturen von H_λ mit $\gamma, \mathcal{P}_\gamma, \alpha \in M_0$. Für jedes $\gamma_0 \in \gamma \cap M_0$ und $(\overline{M}, \mathcal{P}_{\gamma_0})$-generische $q_0 \in \mathcal{P}_{\gamma_0}$ gilt:*

Wenn für einen Namen $\dot{p}_0 \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}_{\gamma_0}}$ gilt

$$q_0 \Vdash_{\mathcal{P}_{\gamma_0}} \left(\dot{p}_0 \in \mathcal{P}_\gamma \cap M_0 \land \dot{p}_0 \restriction \gamma_0 \in \dot{G}_0\right)$$

(wobei G_0 der entsprechende $(\boldsymbol{V}, \mathcal{P}_{\gamma_0})$-generische Filter ist), dann gibt es ein $(\overline{M}, \mathcal{P}_\gamma)$-generisches q so, dass

$$q \restriction \gamma_0 = q_0 \text{ und } q \Vdash_{\mathcal{P}_\gamma} \dot{p}_0 \in \dot{G}$$

(für den entsprechenden $(\boldsymbol{V}, \mathcal{P}_\gamma)$-generischen Filter G).

Korollar 3.2. *Die countable support Iteration von $<\omega_1$-properen Forcingordnungen ist selbst ebenfalls $<\omega_1$-proper.*

Für einen Beweis verweise ich auf die zitierte Literatur, da zum einen α-Properness nicht das eigentliche Kriterium ist, das uns interessiert, und zum anderen, da wir das analoge Lemma für $\mathbb{D}$-vollständige Forcings ohnehin zeigen werden.

Wir wollen nun natürlich zeigen:

Satz 3.3. [21] *$\mathcal{P}_\mathcal{I}$ ist $<\omega_1$-proper.*

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion über $\alpha < \omega_1$. Wie in Bemerkung 2.2 bereits erwähnt wurde der Beweis von Satz 2.3 explizit so geführt, dass er uns als Induktionsanfang dient. Wir können somit folgende Induktionsvorraussetzung nutzen:

Für jeden α-Turm $\overline{M}$, jedes $p_0 \in \mathcal{P} \cap M_0$ und jedes $z \subseteq M_\alpha \cap S$ mit $I \subseteq^* z$ für alle $I \in \mathcal{I} \cap M_\alpha$ gibt es ein $\overline{M}$-generisches $q \leq p_0$ mit $x_q \setminus x_{p_0} \subseteq z$.

Für den Nachfolgerschritt sei $\alpha = \beta+1$ und $A = \mathcal{I} \cap M_\beta$. Wegen $<_I$ ist z_A in M_α definierbar und $A \in M_\alpha$. Außerdem ist $z_A \cap z$ wegen $z_A \subseteq^* z$ eine coendliche Teilmenge von z_A und somit ebenfalls in M_α. Entsprechend können wir die Induktionsvorraussetzung in M_α auf $z \cap z_A$ anwenden und mit der Properness von $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ die Behauptung folgern.

Betrachten wir also für den Limesschritt eine Limeszahl α und sei $(\alpha_i)_{i\in\omega}$ eine konfinale aufsteigende Folge in α. Setze $A_i = M_{\alpha_i} \cap \mathcal{I}$ und $z_i = z \cap z_{A_i}$. Wieder gilt wegen Definierbarkeit $z_i \in M_\beta$ für alle $\beta > \alpha_i$. Analog zum Beweis von Satz 2.3 konstruieren wir wieder, ausgehend von p_0, eine absteigende Folge von Bedingungen $p_{i+1} \in M_{\alpha_i+1} \cap \mathcal{P}$ für alle $i \in \omega$ so, dass:

$$x_{p_{i+1}} \setminus x_{p_i} \subseteq z_i \setminus c_i \qquad (*)$$

[20] [Abr10, S.372]
[21] [Tod00, S.262]

für eine endliche Teilmenge $c_i \subseteq z_i$, die (genau wie vorher schon) für jedes $X \in \mathcal{X}_{p_i}$ garantiert, dass die Menge $Z_{X,i}$ (wie oben) konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist. Die benötigten c_i liefert uns ein geeignetes Bookkeeping.

Die Bedingung p_{i+1} wiederum erhalten wir, indem wir die Induktionsvorraussetzung in $M_{\alpha_{i+1}}$ auf $p_i, (M_j)_{j \leq \alpha_i}$ und $z_i \setminus c_i$ anwenden (offensichtlich liegen diese Mengen alle in $M_{\alpha_{i+1}}$). Die letztenendes gesuchte Bedingung $q = (x_q, \mathcal{X}_q)$ definieren wir dann als:

$$x_q := \bigcup_{i \in \omega} x_{p_i} \qquad \mathcal{X}_q := \{Z_{X,i} \mid i \in \omega, X \in \mathcal{X}_{p_i}\} \cup \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{X}_{p_i}$$

Dann ist q per Konstruktion $(M_i)_{i \leq \alpha}$-generisch. $\square$

3.2 $\mathbb{D}$-Vollständigkeit

Wir definieren nun eine Klasse von Forcingordnungen, die keine neuen reellen Zahlen hinzufügen und sich hinreichend oft iterieren lassen, um die PID in ihrer vollen Allgemeinheit zu erzwingen ohne GCH zu zerstören. Hierfür benötigen wir Completeness-Systeme:

Definition 3.2. [22][23]

- Sei $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0)$ eine auf folgenden Argumenten definierte Funktion:
  - M ist eine abzählbare elementare Unterstruktur von irgendeinem H_θ (für hinreichend großes θ),
  - $\mathcal{P}$ ist eine Forcingordnung in M und
  - $p_0 \in \mathcal{P} \cap M$.

  Dann heißt $\mathbb{D}$ *Completeness-System*, wenn für alle erlaubten Parameter gilt:

  $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0) \neq \emptyset$ und für jedes $\mathcal{G} \in \mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0)$ gilt $\mathcal{G} \neq \emptyset$ und $\mathcal{G} \subseteq Gen_{p_0}(M, \mathcal{P})$.
- Ein Completeness-System $\mathbb{D}$ heißt *λ-vollständig*, wenn für jedes geeignete Parametertupel $(M, \mathcal{P}, p_0)$ der Schnitt aus höchstens λ vielen Elementen aus $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0)$ nicht leer ist.

Bemerkung 3.2. Der obigen Definition nach ist ein Completeness-System $\mathbb{D}$ eine *echte Klasse*, da es auf beliebigen Unterstrukturen beliebig großer H_θ und beliebigen Forcingordnungen definiert sein muss. Dieses Problem lässt sich aber vermeiden, indem wir (wie in [She98]) $\mathbb{D}$ nur für ein festes hinreichend großes $\mu_\mathbb{D}$ definieren. Für $\mu' > \mu_\mathbb{D}$ lässt sich $\mathbb{D}$ dann auf Modelle $\mu_\mathbb{D} \in M \prec H_{\mu'}$ fortsetzen, indem wir definieren

$$\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0) := \mathbb{D}(M \cap H_{\mu_\mathbb{D}}, \mathcal{P}, p_0).$$

Nachdem wegen $\mathcal{P} \in H_{\mu_\mathbb{D}}$ beim runterschneiden auf $H_{\mu_\mathbb{D}}$ keine $\mathcal{P}$-dichten Mengen verloren gehen, bleiben alle erforderlichen Bedingungen erhalten; die Existenz eines solchen $\mu_\mathbb{D}$ ist in manchen Beweisen aber durchaus hilfreich.[24]

Alternativ (wie in [Abr10]) können wir $\mathbb{D}$ nur auf abzählbaren *transitiven* Modellen von ZFC^- definieren und anschließend auf beliebige Modelle erweitern, indem wir die Urbilder der einzelnen Filter unter dem Isomorphismus zum transitiven Kollaps betrachten.

Definition 3.3. Eine Forcingordnung $\mathcal{P}$ heißt *$\mathbb{D}$-vollständig bezüglich eines Completeness-Systems* $\mathbb{D}$, wenn für jede abzählbare elementare Unterstruktur $M \prec H_\theta$ für hinreichend großes θ und jedes $p_0 \in \mathcal{P} \cap M$ ein $\mathcal{G} \in \mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p_0)$ existiert so, dass jeder Filter $G \in \mathcal{G}$ in $\mathcal{P}$ *beschränkt* ist (d.h. es gibt ein $q \in \mathcal{P}$ so, dass $G \subseteq \{r \in \mathcal{P} \mid q \leq r\}$).

Das nützliche an diesen Forcingordnungen ist:

---

[22] [She98, S.225]

[23] [Abr10, S.379f]

[24] In dem Fall müssen wir natürlich – potentiell unbefriedigenderweise – die Funktion für jede Forcingordnung *einzeln* definieren.

Satz 3.4. [25] *$\mathcal{P}$ ist $\mathbb{D}$-vollständig bezüglich eines Completeness-Systems $\mathbb{D}$ genau dann, wenn $\mathcal{P}$ proper ist und beim forcen keine neuen reellen Zahlen hinzufügt.*

Beweis. Angenommen, $\mathcal{P}$ ist $\mathbb{D}$-vollständig und seien entsprechend geeignete $M \prec H_\theta, p \in \mathcal{P}$ mit $p, \mathcal{P}, \mathbb{D} \in M$ gegeben. Per Definition gibt es ein $\mathcal{G} \in \mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p)$ so, dass $\mathcal{G}$ nur beschränkte Filter enthält. Wähle $G \in \mathcal{G}$ beliebig und sei $q \in \mathcal{P}$ die dazugehörige Schranke. Offensichtlich ist q dann M-generisch, also ist $\mathcal{P}$ proper.

Gelte nun $p \Vdash (\dot{f} \in {}^\omega\omega)$ für irgendeinen Namen $\dot{f} \in M$ und betrachte die Menge

$$D_n = \Big\{ r \in \mathcal{P} \mid \exists k \in \omega \; r \Vdash (\dot{f}(n) = k) \Big\}$$

für jedes $n \in \omega$. Dann sind die D_n offensichtlich dicht in $\mathcal{P}$ und in M definierbar, also $D_n \cap G \neq \emptyset$. Nach Beschränktheit von G legt q also bereits alle Werte von f fest, also ist f keine neue reelle Zahl.

Für die Rückrichtung seien M, p geeignet und $q \leq p$ sei M-generisch. Sei außerdem $(D_n)_{n\in\omega}$ eine Aufzählung aller maximalen Antiketten in M und $D_n \cap M = (p_{n,k})_{k\in\omega}$. Jeder M-generische Filter enthält genau ein Element aus D_n, betrachte also den Namen $\dot{f} = \Big\{ ((n, \dot{k}), p_{n,k}) \mid n, k \in \omega \Big\}$.

Nachdem q generisch ist (und maximale Antiketten prädicht sind), folgt $q \Vdash (\dot{f} \in {}^\omega\omega)$. Nach Vorraussetzung fügt $\mathcal{P}$ aber keine neuen reellen Zahlen hinzu, also muss ein $x \in ({}^\omega\omega)^{\mathbf{V}}$ und $r \leq q$ existieren mit $r \Vdash (x = \dot{f})$. Entsprechend ist der von r erzeugte Filter G_r durch r beschränkt, enthält p, erzwingt ganz $\dot{f}$ und ist somit M-generisch. Definiere also $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p) = \{\{G_r\}\}$ und wir haben ein geeignetes Completeness-System gefunden. □

Man beachte, dass wir bei der Hinrichtung des Beweises nur einen beschränkten M-generischen Filter gebraucht haben; bzw. die zugehörige untere Schranke q. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 3.4. [26] Sei $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung und M ein geeignetes Modell. Wir nennen $q \in \mathcal{P}$ *total M-generisch (completely generic)*, wenn der durch q induzierte Filter M-generisch ist.

Somit erhalten wir als Korollar aus dem vorherigen Beweis:

Korollar 3.5. *Jeder generische Filter, der ein total generisches Element enthält, fügt beim forcen keine neuen reellen Zahlen hinzu.*

Das Completeness-System, bezüglich welchem sich $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ als $\mathbb{D}$-vollständig erweisen wird, hat insbesondere die folgende schöne Eigenschaft, die (wie wir später sehen werden) bei der Iteration von Nutzen ist:

Definition 3.5. [27] Ein Completeness-System $\mathbb{D}$ heißt *simpel*, wenn es eine zweitstufige Formel $\psi(X_0, X_1, x_2, x_3)$ gibt so, dass $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p) = \{\mathcal{G}_C \mid C \subseteq M^n$ für irgendein $n \in \omega\}$ für

$$\mathcal{G}_C := \{G \in Gen_p(M, \mathcal{P}) \mid M \models \psi(C, G, \mathcal{P}, p)\}$$

[25] [She98, S.227]
[26] [Abr10, S.376]
[27] [She98, S.227]

Wir haben damit alle nötigen Definitionen, um zu zeigen:

Satz 3.6. [28] *$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ ist $\mathbb{D}$-vollständig bezüglich eines simplen ω-vollständigen Completeness-Systems $\mathbb{D}$.*

Beweis. Betrachte ein Tripel $(M, \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, p_0)$. Wir suchen eine zweitstufige Formel wie oben, die uns $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, p_0)$ definiert. Hierfür soll eine Menge $C \subseteq M$ wie in Definition 3.5 eine beliebige Codierung der folgenden Mengen darstellen:

(a) Eine Aufzählung $(D_n)_{n\in\omega}$ aller dichten offenen Teilmengen von $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$, die in M liegen,

(b) eine Aufzählung $(X_n)_{n\in\omega}$ aller konfinalen Teilmengen von $[\mathcal{I}]^\omega$, die in M liegen,

(c) eine abzählbare Folge $(c_i)_{i\in\omega}$ endlicher Teilmengen von $S \cap M$ und

(d) eine Teilmenge $z \subseteq M \cap S$ mit $I \subseteq^* z$ für alle $I \in \mathcal{I} \cap M$.

Man beachte, dass dies genau die „Typen" von Mengen sind, die wir in den Beweisen von Satz 2.3 und Satz 3.3 bereits verwendet haben. Entsprechend wissen wir bereits, wie wir mit diesen Objekten generische Bedingungen konstruieren können.

Mit der Idee dieser vorherigen Beweise im Hinterkopf soll die gesuchte Formel $\psi(C, G, \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, p_0)$ (mit Parameter $\mathcal{I}$) nun folgendes ausdrücken:

- Die Menge C codiert Mengen der Form (a)–(d),
- G ist ein Filter erzeugt von einer absteigenden Folge $(p_n)_{n\in\omega}$ von Bedingungen ausgehend von p_0 so, dass für fast alle $n \in \omega$ gilt:
  - $p_{n+1} \in \bigcap_{i\le n} D_i$,
  - $x_{p_{n+1}} \setminus x_{p_n} \subseteq z$ und
  - $(x_{p_{n+1}} \setminus x_{p_n}) \cap c = \emptyset$ für jede endliche Menge $c \subseteq S \cap M$ der folgenden Form:
    * Es gibt $i, j \le n$ mit $X_i \in \mathcal{X}_{p_j}$ und
    * für das minimale j mit dieser Eigenschaft gilt $c = c_\ell$, wobei ℓ der kleinste Index ist so, dass $X_\ell = \{A \in X_i \mid x_{p_n} \setminus x_{p_j} \subseteq z_A\}$.

Wenn nun irgendeine Menge $C \subseteq M$ genau $z = z_M$ und die Folge $(c_i)_{i\in\omega}$ codiert, bei der c_i die kleinste endliche Menge ist, für die $X_\ell = \{A \in X_i \mid z_M \subseteq z_A \cup c_i\}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ ist, sind wir genau in der Situation wie im Beweis von Satz 2.3. Für so eine Menge C ist also jede Menge G, die $M \models \psi(C, G, \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, p_0)$ erfüllt, ein M-generischer Filter, der p_0 enthält und – da er von der Folge $(p_n)_{n\in\omega}$ erzeugt wird – durch das „Infimum" q aus dem Beweis beschränkt ist. C bezeugt also, dass $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ vollständig bezüglich des entsprechenden durch ψ definierten (und damit simplen) $\mathbb{D}$ ist.

Für die ω-Vollständigkeit beachte man weiterhin, dass sich die „gültigen" Mengen $C \subseteq M$ (und entsprechend die Mengen $\mathcal{G}_C$ aus Definition 3.5) nur in der Codierung der

[28] [Tod00, S.263]

Menge $z \subseteq M \cap S$ *wesentlich* unterscheiden (die c_i hängen von z ab und führen nicht zu unterschiedlichen Filtermengen). Um zu zeigen, dass $\mathbb{D}$ auch ω-vollständig ist, müssen wir also nur für abzählbar viele verschiedene $\mathcal{G}_i \in \mathbb{D}(M, \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, p_0)$ die zugehörigen Kandidaten $(z_i)_{i\in\omega}$ betrachten.

Der relevante Schritt im Beweis von Satz 2.3 ist hierbei die Forderung (a) $x_\omega \setminus x_0 \subseteq z$, wobei allerdings für jeden der Kandidaten z_i gelten muss $I \subseteq^* z_i$ für alle $I \in \mathcal{I} \cap M$ und per Konstruktion $x_\omega \setminus x_0 \subseteq z_A \subseteq^* z_i$ für die entsprechenden *konfinal vielen* $A \in X \in \mathcal{X}_{p_0}$ immer erfüllt ist. Wir können also (wie leicht aus dem Beweis ersichtlich ist) ohne Schwierigkeiten das Konstruktionsverfahren und die endliche Menge c_0 an abzählbar viele z_i anpassen um eine Bedingung zu finden, die einen Filter erzeugt, der entsprechend im Schnitt $\bigcap_{i\in\omega} \mathcal{G}_i$ liegt; $\mathbb{D}$ ist also ω-vollständig. $\square$

3.3 Die Iteration von $\mathbb{D}$-vollständigen Forcingordnungen

Wir werden nun im Rest dieses Abschnittes zeigen, dass auch die countable support Iteration geeigneter $\mathbb{D}$-vollständiger Forcingordnungen keine neuen reellen Zahlen hinzufügt. Die Darstellung orientiert sich dabei stark an [Abr10, S.382ff]. Der zentrale Schritt dieses Beweises ist das folgende Extensionslemma:

Lemma 3.7. ($\mathbb{D}$-Completeness Extension Lemma) *Sei $(\mathcal{P}_i, \dot{\mathcal{Q}}_i)_{i\leq\gamma}$ eine countable support Iteration von Forcingordnungen, so, dass in jedem $\boldsymbol{V}^{\mathcal{P}_i}$ gilt:*

- *$\mathcal{Q}_i$ ist $< \omega_1$-proper und*
- *$\mathcal{Q}_i$ ist $\mathbb{D}$-vollständig bzgl eines ω-vollständigen Completeness-Systems im Basismodell $\boldsymbol{V}$.*

Sei außerdem $\overline{M}$ ein α-Turm mit $P_\gamma, p_0 \in M_0$ und $\gamma_0 \in \gamma \cap M_0$ mit $\mathit{otp}(M_0 \cap [\gamma_0, \gamma)) = \alpha$. Dann gilt:

Für jedes total M_0-generische und *$\overline{M}$-generische $q_0 \in \mathcal{P}_{\gamma_0}$ mit $q_0 < p_0 \restriction \gamma_0$ gibt es ein $q \in \mathcal{P}_\gamma$ so, dass $q_0 = q \restriction \gamma_0, q < p_0$ und q total M_0-generisch ist.*

Haben wir dies gezeigt, folgt mit einem beliebigen α-Turm über $M_0 = M \ni p$ und dem entsprechenden total M-generischen Element $q \leq p$ mit Korollar 3.5 insbesondere also:

Korollar 3.8. *Jede countable support Iteration $< \omega_1$-properer Forcingordnungen, die jeweils $\mathbb{D}$-vollständig bzgl eines ω-vollständigen Completeness-Systems (im Basismodell) sind, fügt keine neuen reellen Zahlen hinzu.*

Nachdem außerdem α-Properness ebenfalls erhalten bleibt, können wir mit Satz 3.4 auch folgern, dass eine entsprechende Iteration selbst $\mathbb{D}$-vollständig ist.

Wir wenden uns zunächst der Zweischritt-Iteration zu und finden folgendes Kriterium für totale Generizität:

Lemma 3.9. *Seien $\mathcal{P}$ und $\dot{\mathcal{Q}} \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}}$ Forcingordnungen (bzw., ein Name für eine solche). Sei außerdem $M_0 \prec H_\theta$ eine abzählbare Unterstruktur für ein hinreichend großes θ mit $P, \dot{Q} \in M_0$, sowie $\pi : M_0 \to N_0$ der transitive Kollaps. Sei weiterhin für $(q_0, \dot{q_1}) \in \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ der von q_0 induzierte Filter $G_{\mathcal{P}}$ sowie $N_0^* = N_0[\pi[G_{\mathcal{P}}]]$ die entsprechende Forcingerweiterung des transitiven Kollapses. Es gilt nun:*

$(q_0, \dot{q_1})$ ist total M_0-generisch genau dann, wenn q_0 total M_0-generisch ist und es einen N_0^*-generischen Filter $G_1 \subseteq \pi(\dot{\mathcal{Q}})^{\pi[G_{\mathcal{P}}]}$ gibt so, dass

$$q_0 \Vdash_{\mathcal{P}} \text{„}\pi^{-1}[\dot{G}_1] \textit{ ist beschränkt durch } \dot{q_1}\text{“}.$$

Der Grund für den Übergang zum transitiven Kollaps ergibt sich aus dem Beweis:

Beweis. Sei also $(q_0, \dot{q_1}) \in \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ beliebig, $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ die (kanonische vollständige) Einbettung definiert über $p \mapsto (p, 1_{\mathcal{Q}})$ und

$$G = \{(p_0, \dot{p_1}) \mid (q_0, \dot{q_1}) \leq (p_0, \dot{p_1})\} = \big\{(p_0, \dot{p_1}) \mid q_0 \leq_{\mathcal{P}} p_0 \wedge q_0 \Vdash_{\mathcal{P}} (\dot{q_1} \leq_{\dot{\mathcal{Q}}} \dot{p_1})\big\}$$

der induzierte Filter.

Natürlich ist $i^{-1}(G) = G_{\mathcal{P}}$ – der Zusammenhang zwischen totaler Generizität von $(q_0, \dot{q}_1)$ und q_0 selbst ist somit klar; bleibt die geeignete Wahl des Elementes $\dot{q}_1$. Ist $(q_0, \dot{q}_1)$ total M_0-generisch, ist auch klar, dass $G_1 := \left\{p \in \dot{\mathcal{Q}}^{G_{\mathcal{P}}} \mid q_0 \Vdash_{\mathcal{P}} (\dot{q}_1 \leq_{\dot{\mathcal{Q}}} \dot{p})\right\}$ ein total $M_0[G_{\mathcal{P}}]$-generischer Filter ist und somit $q_0 \Vdash_{\mathcal{P}}$ „q_1 ist total $M_0[\dot{G}]$-generisch“.

Ist allerdings *nur* letzteres der Fall, reicht der von $(q_0, \dot{q}_1)$ erzeugte Filter $G_{\mathcal{P}} * H$ (wobei H der von $\dot{q}_1{}^{G_{\mathcal{P}}}$ erzeugte Filter über $\dot{\mathcal{Q}}^{G_{\mathcal{P}}}$ ist) nicht aus, um *notwendigerweise* jede dichte Menge D *über* $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ in M_0 zu treffen, da sich D nicht zwangsläufig in jeweils dichte Mengen über $\mathcal{P}$ und $\dot{\mathcal{Q}}^{G_{\mathcal{P}}}$ zerlegen lässt, die ebenfalls in M_0 bzw. $M_0[G_{\mathcal{P}}]$ liegen. Mit dem Übergang zum transitiven Kollaps hingegen können wir dieses Problem umschiffen:

Hierfür beachte man zunächst, dass für jeden $\mathbf{V}$-generischen Filter F , der q_0 enthält, $M_0[F]$ eine elementare Unterstruktur von $H_\theta[F]$ ist und π problemlos auf $M_0[F] \to N_0[\pi[G_{\mathcal{P}}]] = N_0^*$ fortgesetzt werden kann. Insbesondere gilt dann für den korrespondierenden Namen $\dot{\pi}$ also $q_0 \Vdash_{\mathcal{P}} M_0[\dot{G}] \to N_0^*$ (wobei $\dot{G}$ der kanonische Name für einen generischen Filter ist).

Offensichtlich ist dann, dass – falls $(q_0, \dot{q}_1)$ total M_0-generisch ist – der entsprechende Filter $\pi[G_1]$ bezeugt, dass $\pi(\dot{q}_1)^{\pi[G_{\mathcal{P}}]}$ total N_0^*-generisch ist und entsprechend q_0 erzwingt, dass G_1 durch q_1 beschränkt ist.

Ist umgekehrt q_0 total M_0 generisch und $G_1 \subseteq \pi(\dot{\mathcal{Q}})^{\pi[G_{\mathcal{P}}]}$ ein N_0^*-generischer Filter, von dem q_0 erzwingt, dass $\pi^{-1}[G_1]$ durch $\dot{q}_1$ beschränkt ist, so ist $G' = \pi[G_{\mathcal{P}}] * G_1$ ein $\pi(\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}})$-generischer Filter, wodurch auch $\pi^{-1}[G'] = G$ ein M_0-generischer und durch (q_0, q_1) beschränkter Filter ist, der somit die M_0-Generizität von (q_0, q_1) bezeugt. □

Unser nächstes Ziel ist es, in Anlehnung an diesen Beweis, eine Funktion $\mathbb{E}$ auf geeigneten Parametern zu definieren so, dass die resultierende Menge $\mathbb{E}(M_0, M_1, \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}, G_0, p_0) \subseteq \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ eine M_0-generische Fortsetzung des M_0-generischen Filters $G_0 \subseteq \mathcal{P}$ ist, die p_0 enthält und $M_0 \in M_1 \prec H_\theta$ gilt.

Definition 3.6. (Die Funktion $\mathbb{E}$)

Seien Objekte der folgenden Form gegeben:

1. Eine $\mathbb{D}$-vollständige Forcingordnung $\mathcal{P}$,
2. $\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathbb{D}} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ so, dass

$$1_{\mathcal{P}} \Vdash \text{„}\dot{\mathbb{D}} \in \mathbf{V} \text{ ist ein } \omega\text{-vollständiges Completeness-System und}$$

$$\dot{\mathcal{Q}} \text{ ist } \mathbb{D}\text{-vollständig bzgl } \dot{\mathbb{D}}\text{“}.$$

3. $M_0 \prec M_1 \prec H_\theta$ seien abzählbar für hinreichend großes θ, $M_0 \in M_1$, $\mathcal{P}, \dot{\mathcal{Q}}, \dot{\mathbb{D}} \in M_0$,
4. $G_0 \subseteq M_0 \cap \mathcal{P}$ sei M_0-generisch mit $G_0 \in M_1$,
5. $p_0 = (a, \dot{b}) \in (\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}) \cap M_0$ beliebig mit $a \in G_0$.

Für Parameter dieser Art sei dann $G := \mathbb{E}(M_0, M_1, \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}, G_0, p_0)$ folgendermaßen definiert:

Wir beginnen wieder mit dem transitiven Kollaps $\pi : M_0 \to N_0$ und betrachten $N_0^* = N_0[\pi[G_0]]$. Nachdem $M_0, G_0, \pi \in M_1$ gilt dann auch $N_0^* \in M_1$. Sei außerdem $Q_0^* = \pi(\dot{\mathcal{Q}})^{\pi[G_0]}$ und $\mathbb{D}_0 = \pi(\dot{\mathbb{D}})^{\pi[G_0]}$. Nach Vorraussetzung erzwingt $1_{\mathcal{P}}$, dass $\mathbb{D} \in \mathbf{V}$ gilt und somit auch $\mathbb{D}_0 \in N_0$, womit $\pi^{-1}(\mathbb{D}_0)$ ein ω-vollständiges Completeness-System ist. Entsprechend ist $D := \mathbb{D}(N_0^*, Q_0^*, \pi(\dot{b})^{\pi[G_0]})$ in M_1 definiert und $M_1 \cap D$ ist abzählbar, womit $\bigcap(M_1 \cap D)$ nicht leer ist, also einen N_0^*-generischen Filter $G_1 \subseteq Q_0^*$ enthält mit $\pi(\dot{b})^{\pi[G_0]} =: b^* \in G_1$.

Betrachte nun $\pi[G_0] * G_1$, dann ist dies ein N_0-generischer Filter über $\pi(\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}})$, der $\pi(p_0)$ enthält, womit wir $G := \pi^{-1}[\pi[G_0] * G_1]$ setzen können.

(Ende der Definition) $\square$

Bemerkung 3.3. Die Funktion $\mathbb{E}$ ist in dieser Form innerhalb von H_θ nicht definierbar, da wir erststufig nicht ausdrücken können, dass M_0, M_1 elementare Unterstrukturen von H_θ sind.

Das Problem können wir umgehen, indem wir $\mathbb{E}$ allgemein auf ZF^--Modellen definieren, für jedes M_0 einen festen M_0-generischen Filter G wählen und – wann immer irgendein Aspekt der Konstruktion von $\mathbb{E}$ nicht funktioniert, da M_0 oder M_1 keine elementare Unterstruktur ist – per Default den Wert von $\mathbb{E}(M_0, M_1, \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}, G_0, p_0) := G$ setzen.

Das Lemma, das uns nun den Nachfolgerschritt erschlägt ist das Folgende:

Lemma 3.10. (Gambit Lemma) *Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Forcingordnung und $\dot{\mathcal{Q}}, \dot{\mathbb{D}} \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}}$ so, dass*

$1_{\mathcal{P}} \Vdash$ „$\dot{\mathbb{D}} \in \boldsymbol{V}$ *ist ein ω-vollständiges Completeness-System und $\dot{\mathcal{Q}}$ ist $\mathbb{D}$-vollständig bzgl $\dot{\mathbb{D}}$*“.

Sei θ hinreichend groß und $M_0 \prec M_1 \prec H_\theta$ abzählbar mit $M_0 \in M_1$ und $\mathcal{P}, \dot{\mathcal{Q}}, \dot{\mathbb{D}} \in M_0$. Sei außerdem $q_0 \in \mathcal{P}$ eine M_1-generische Bedingung, total M_0 generisch und sei $G_0 \subseteq M_0 \cap \mathcal{P}$ der von q_0 erzeugte Filter. Dann gilt:

Für jedes $(a, \dot{b}) = p_0 \in (\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}) \cap M_0$ mit $a \in Q_0$ gibt es ein $\dot{q}_1 \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}}$ so, dass $(q_0, \dot{q}_1)$ total M_0-generisch ist und $(q_0, \dot{q}_1) \leq p_0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $G_0 \in M_1$: Sei hierfür R die Menge aller total M_0-generischen $r \in \mathcal{P}$. Dann gilt $q_0 \in R \in M_1$. Nachdem q_0 außerdem M_1-generisch ist, gibt es ein kompatibles $r \in R \cap M_1$. Kompatible Bedingungen erzeugen aber den selben Filter, also $G_0 \in M_1$.

Setze nun also $G := \mathbb{E}(M_0, M_1, \mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}, G_0, p_0)$. Unter der selben Terminologie wie in den vorherigen Beweisen lässt sich damit der transitive Kollaps $\pi : M_0 \to N_0$ auf die entsprechenden generischen Erweiterungen ausdehnen und es gilt $q_0 \Vdash (\dot{\pi} : M_0[\dot{G}] \to N_0^*)$. Nach Lemma 3.9 müssen wir also nur zeigen, dass $q_0 \Vdash$ „$\pi^{-1}[G_1]$ ist beschränkt in $\dot{\mathcal{Q}}$“, wobei wieder $G_1 \in \bigcap(M_1 \cap \mathbb{D}(N_0^*, Q_0^*, b^*))$.

Sei also F ein $\mathbf{V}$-generischer Filter mit $q_0 \in F$. Dann ist also $\dot{\pi}^F$ der transitive Kollaps $M_0[F] \to N_0^*$ und nach Vorraussetzung gibt es ein $\mathcal{G} \in \mathbb{D}(N_0^*, Q_0^*, b*)$ so, dass für jeden Filter $H \in \mathcal{G}$ das Urbild $\pi^{-1}[H]$ in $\dot{\mathcal{Q}}^F$ liegt. Wegen $M_1[F] \prec H_\theta[F]$ gilt $X \in M_1[F]$. Nach Vorraussetzung liegt aber $\mathbb{D}$ in $\mathbf{V}$, also $X \in M_1$. Nach Definition von G_1 folgt somit $G_1 \in X$, und somit gilt $q_0 \Vdash$ „$\pi^{-1}[G_1]$ ist beschränkt in $\dot{\mathcal{Q}}$“. □

Wir können uns somit nun einer beliebigen countable support Iteration zuwenden. Hierfür müssen wir zunächst in unserer Definition der Funktion $\mathbb{E}$ das Modell M_1 durch einen α-Turm von Modellen ersetzen, um mit transfiniten Iterationen umgehen zu können:

Definition 3.7. (Erweiterung der Funktion $\mathbb{E}$)

Seien Objekte der folgenden Form gegeben:

1. Eine countable support Iteration $(\mathcal{P}_i, \dot{\mathcal{Q}}_i)_{i \leq \gamma}$ so, dass
2. jedes der $\dot{\mathcal{Q}}_i$ ist $\mathbb{D}$-vollständig bezüglich irgendeines ω-vollständigen Completeness-Systems in $\mathbf{V}$,
3. $M_0 \prec H_\theta$ abzählbar für hinreichend großes θ mit $\mathcal{P}_\gamma, \gamma \in M_0$,
4. ein α-Turm $\overline{M} = (M_\xi)_{1 \leq \xi \leq \alpha}$ abzählbarer elementarer Unterstrukturen von H_θ mit $M_0 \in M_1$ (M_0 ist also explizit nicht Teil des Turms!),
5. ein M_0-generischer Filter $G_0 \in M_1$ über $\mathcal{P}_{\gamma_0}$ für irgendein $\gamma_0 \in M_0 \cap \gamma$ mit $\mathsf{otp}(M_0 \cap [\gamma_0, \gamma)) = \alpha$,
6. $p_0 \in \mathcal{P}_\gamma \cap M_0$ mit $p_0 \restriction \gamma_0 \in G_0$.

Dann soll $G_\gamma = \mathbb{E}(M_0, \overline{M}, \mathcal{P}_\gamma, G_0, p_0)$ ein M_0-generischer Filter über $\mathcal{P}_\gamma$ sein, der G_0 erweitert und p_0 enthält. Wir definieren G_γ per Induktion über $\alpha < \omega_1$:

Ist $\alpha = \alpha' + 1$ eine Nachfolgerzahl, so ist wegen $\mathsf{otp}(M_0 \cap [\gamma_0, \gamma)) = \alpha$ auch $\gamma = \gamma' + 1$ eine Nachfolgerzahl. Es gilt $\gamma_0 = \gamma'$ genau dann, wenn $\alpha = 1$. In dem Fall ist $\mathcal{P}_\gamma$ isomorph zu $\mathcal{P}_{\gamma_0} * \dot{\mathcal{Q}}_{\Gamma_0}$ und wir haben nur zwei Modelle $M_0 \prec M_1$; wir können also die vorherige Definition 3.6 verwenden. Gelte also $\gamma_0 < \gamma'$ und sei nach Induktionsvorraussetzung

$$G_{\gamma'} = \mathbb{E}(M_0, (M_\xi)_{1 \leq \xi \leq \alpha'}, \mathcal{P}_{\gamma'}, G_0, p_0 \restriction \gamma').$$

Dann ist dies also ein M_0-generischer Filter über $\mathcal{P}_{\gamma'}$, der G_0 erweitert und $p_0 \restriction \gamma'$ enthält. Wie wir später sehen werden, dürfen (und *müssen*) wir annehmen, dass $G_{\gamma'} \in M_\alpha$ liegt und somit wieder Definition 3.6 auf

$$G_\gamma := \mathbb{E}(M_0, M_\alpha, \mathcal{P}_{\gamma'} * \dot{\mathcal{Q}}_{\gamma'}, G_{\gamma'}, p_0)$$

anwenden.

Sei nun α eine Limeszahl und $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ eine aufsteigende konfinale Folge in α mit $\alpha_0 = 0$. Wir können entsprechend $\gamma_n \in M_0$ so wählen, dass $\alpha_n = \mathsf{otp}(M_0, [\gamma_0, \gamma_n))$; dann ist $(\gamma_n)_{n \in \omega}$ ebenfalls eine aufsteigende konfinale Folge in $\gamma \cap M_0$. Sei $(D_n)_{n \in \omega}$ eine

Aufzählung aller dichten Teilmengen von $\mathcal{P}_\gamma$ in M_0. Wir definieren nun induktiv über $n \in \omega$ Bedingungen $p_n \in \mathcal{P}_\gamma \cap M_0$ und M_0-generische Filter $G_n \in M_{\alpha_n+1}$ über $\mathcal{P}_{\gamma_n}$ so, dass:

(a) $p_n \restriction \gamma_n \in G_n$ und

(b) $p_n \geq p_{n+1} \in D_n$.

G_0, p_0 sind bereits gegeben. Angenommen also, G_n, p_n sind definiert. Ein $p_{n+1} \in D_n \cap M_0$ mit $p_{n+1} \restriction \gamma_n \in G_n$ zu finden ist wegen der Generizität von G_n leicht. Wir können also nach Induktionsvorraussetzung wählen

$$G_{n+1} = \mathbb{E}(M_0, (M_\xi)_{\alpha_n+1 \leq \xi \leq \alpha_{n+1}}, \mathcal{P}_{\gamma_{n+1}}, G_n, p_{n+1} \restriction \gamma_{n+1}).$$

Setze schließlich für G_γ den von allen p_n erzeugten Filter, dann sind nach Konstruktion alle geforderten Bedingungen erfüllt.

Man beachte außerdem abschließend, dass sowohl im Nachfolger- als auch Limesschritt alle verwendeten Parameter jeweils im betrachteten M_α liegen; unsere vorherige Annahme, dass $G_{\gamma'} \in M_\alpha$ ist also unproblematisch.

(Ende der Definition)□

Mit dieser Definition können wir nun endlich das Extensionslemma beweisen. Hierfür brauchen wir noch das entsprechende Extensionslemma für proper Forcings:

Lemma 3.11. (Properness Extension Lemma)[29] *Sei $(\mathcal{P}_\alpha, \dot{\mathcal{Q}}_\alpha)$ eine countable support Iteration von jeweils properen Forcingordnungen und θ hinreichend groß; $M \prec H_\theta$ eine abzählbare elementare Unterstruktur mit $\gamma, \mathcal{P}_\gamma \in M$ Für jedes $\gamma_0 \in \gamma \cap M$ und M-generische $q_0 \in \mathcal{P}_{\gamma_0}$ gilt:*

Wenn für $\dot{p}_0 \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}_{\gamma_0}}$ gilt $q_0 \Vdash_{\mathcal{P}_{\gamma_0}} (\dot{p}_0 \in \mathcal{P}_\gamma \cap M)$ und $\dot{p}_0 \restriction \gamma_0 \in \dot{G}$, dann gibt es ein M-generisches $q \in \mathcal{P}_\gamma$ so, dass $q \restriction \gamma_0 = q_0$ und $q \Vdash_{\mathcal{P}_\gamma} (\dot{p}_0 \in \dot{G})$.

Für einen Beweis verweise ich wieder auf die angegebene Literatur.

Beweis Lemma 3.7 ($\mathbb{D}$-Completeness Extension Lemma). Seien also Mengen wie in der Aussage des Lemmas gegeben und $G_0 \subseteq \mathcal{P}_{\gamma_0} \cap M_0$ der von q_0 induzierte M_0-generische Filter. Nachdem q_0 auch $\overline{M}$-generisch ist, gilt also $G_0 \in M_1$. Wir zeigen nun per Induktion über $\alpha = \mathsf{otp}(M_0 \cap [\gamma_0, \gamma))$ die Existenz einer Schranke für $G_\gamma = \mathbb{E}(M_0, (M_\xi)_{1 \leq \xi \leq \alpha}, \mathcal{P}_\gamma, G_0, p_0)$. Der Induktionsanfang ist nach Vorraussetzung gegeben.

Seien also zunächst $\alpha = \alpha' + 1$ und entsprechend auch $\gamma = \gamma' + 1$ Nachfolgerzahlen. Definiere dann in M_α eine maximale Antikette $X \subseteq P_{\gamma_0}$ so, dass jedes $r \in X$ eine Schranke von G_0 und $(M_\xi)_{1 \leq \xi \leq \alpha'}$-generisch ist (nachdem die Menge aller Bedingungen dieser Form dicht ist, finden wir so ein X). X ist somit insbesondere prädicht unter q_0. Nach Induktionsvorraussetzung gibt es für jedes $r_0 \in X$ eine Erweiterung $r_1 \in P_{\gamma'}$, dass als untere Schranke für $G_{\gamma'} = \mathbb{E}(M_0, (M_\xi)_{1 \leq \xi \leq \alpha'}, \mathcal{P}_{\gamma'}, G_0, p_0 \restriction \gamma')$ dient. Außerdem sind alle

[29][Abr10, S.345]

diese Parameter in M_α; wir können also $G_{\gamma'} \in M_\alpha$ folgern. Nachdem $M_\alpha \prec H_\theta$ können wir außerdem für jedes $r_0 \in X \cap M_\alpha$ unser $r_1 \in M_\alpha$ wählen. Für den zugehörigen Namen $\dot{r_1} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}_{\gamma_0}}$ gilt somit $q_0 \Vdash (\dot{r_1} \in M_\alpha \cap \mathcal{P}_{\gamma'})$. Nachdem X eine maximale Antikette ist, gibt es also für jeden $\mathbf{V}$-generischen Filter G über $\mathcal{P}_{\gamma_0}$ mit $q_0 \in G$ genau eine Bedingung $r_0 \in X \cap G$; setze also $r_1 := \dot{r_1}^G$. Nach dem Properness Extensionslemma gibt es nun eine Erweiterung $q_1 \in \mathcal{P}_{\gamma'}$ mit $q_1 \restriction \gamma_0 = q_0$ so, dass q_1 als M_α-generisch ist und $q_1 \Vdash (\dot{r_1} \in \dot{G})$. Entsprechend ist q_1 eine Schranke von $G_{\gamma'}$. Mit Lemma 3.10 und Definition 3.7 finden wir schließlich eine Schranke $q_2 \in \mathcal{P}_\gamma$ für G_γ so, dass $q_2 \restriction \gamma' = q_1$ und die Behauptung erfüllt ist.

Sei nun also α eine Limeszahl. Wie in der Konstruktion von Definition 3.7 wählen wir eine konfinale Folge $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ in α, eine korrespondierende konfinale Folge $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ in $\gamma \cap M_0$, Bedingungen $p_n \in \mathcal{P}_\gamma \cap M_0$ mit zugehörigen Filtern $G_n \subseteq \mathcal{P}_{\gamma_n}$ mit $G_n \in M_{\alpha_n+1}$ und schließlich den von allen p_n erzeugten Filter G_γ. Wir definieren nun eine Folge $q_n \in \mathcal{P}_{\gamma_n}$ per Induktion über $n \in \omega$ so, dass für jedes n gilt:

(a) q_n ist eine Schranke für G_n,

(b) $q_n < p_n \restriction \gamma_n$,

(c) $q_n = q_{n+1} \restriction \gamma_n$ und

(d) q_n ist $(M_\xi)_{\alpha_n+1\leq\xi\leq\alpha}$-generisch.

Man beachte, dass dabei q_n nicht mehr M_ξ-generisch für $0 < \xi < \alpha_n$ sein muss und entsprechend $q := \bigcup_{n\in\omega} q_n$ für kein $\xi > 0$ mehr (notwendigerweise) M_ξ-generisch ist; die einzelnen M_ξ brauchen wir aber auch nicht mehr, da q nur total M_0-generisch sein soll.

Sei nun also q_n konstruiert, dann wähle (wie im Nachfolgerschritt) eine maximale Antikette $X \in M_{\alpha_{n+1}+1}$ über $\mathcal{P}_{\gamma_n}$ bestehend aus Bedingungen, die G_n erzeugen und $(M_\xi)_{\alpha_n+1\leq\xi\leq\alpha_{n+1}}$-generisch über $\mathcal{P}_{\gamma_n}$ sind. Für jedes $r_0 \in X$ gibt es also mit der Induktionsvorraussetzung ein $r_1 \in \mathcal{P}_{\gamma_{n+1}}$ so, dass r_1 eine Schranke von G_{n+1} ist, $r_1 < p_{n+1} \restriction \gamma_{n+1}$ und $r_1 \restriction \gamma_n = r_0$ gilt. Wieder wählen wir $r_1 \in M_{\alpha_{n+1}+1}$, wenn $r_0 \in X \cap M_{\alpha_{n+1}+1}$. Wieder ist dann $\dot{r} := \{r_1 \mid r_0 \in X\}$ ein Name, für den gilt $q_0 \Vdash (\dot{r} \in M_{\alpha_{n+1}+1})$. Nach dem α-Extensionlemma (Lemma 3.1) finden wir ein q_{n+1}, das Bedingungen (b)-(d) erfüllt und $\dot{r} \in \dot{G}$ erzwingt, woraus folgt, dass q_{n+1} eine Schranke für G_{n+1} darstellt und somit alle geforderten Bedingungen erfüllt.

Mit $q = \bigcup_{n\in\omega} q_n$ ist das Lemma somit bewiesen. □

Bemerkung 3.4. [30] Man beachte, dass in den Lemmata dieses Abschnittes jeweils gefordert wird, dass die Completeness-Systeme der einzelnen Forcingordnungen der jeweils betrachteten Iterationen im Grundmodell $\mathbf{V}$ liegen müssen. Das ist offensichtlich insofern unbefriedigend, dass in der Iteration entsprechend jede der Ordnungen Bezug auf das Grundmodell nehmen muss, statt nur auf das Modell, in dem das jeweilige Forcing durchgeführt wird.

[30] [Abr10, S.389]

An dieser Stelle kommen die *simplen* Completeness-Systeme (siehe Definition 3.5) ins Spiel. Dadurch, dass diese garantieren, dass das jeweilige Completeness-System in einem gewissen Sinne *definierbar* ist, kann die Einschränkung, dass das Completeness-System im Grundmodell liegen soll, bei simplen Completeness-Systemen verworfen werden.

Auch können wir für Completeness-Systeme (analog zu PFA) die *simpel über H_{ω_1} sind* (d.h. wir ersetzen in Definition 3.5 in den Definitionen von $\mathbb{D}(M, \mathcal{P}, p)$ und $\mathcal{G}_C$ jeweils das Modell M durch H_{ω_1}) ein sinnvolles Forcingaxiom kompatibel mit der *einfachen* Kontinuumshypothese einführen, das nicht Bezug auf das Grundmodell nehmen muss und dessen Konsistenz sich mit superkompakten Kardinalzahlen zeigen lässt:[31]

PFA for countably complete simple completeness systems Es gilt $2^\omega = \omega_1$ und für jede $< \omega_1$-propere Forcingordnung $\mathcal{P}$, die $\mathbb{D}$-vollständig bezüglich eines ω-vollständigen simplen (über H_{ω_1}) Completeness-Systems ist, und jede Familie $(D_i)_{i \in \omega_1}$ dichter Teilmengen von $\mathcal{P}$ gibt es einen Filter $G \subseteq \mathcal{P}$, der jedes der D_i schneidet.

Wir werden dies jedoch nicht beweisen (das Axiom wäre für unsere Zwecke ohnehin zu schwach), sondern stattdessen in Satz 4.2 die dabei verwendete Beweismethode ausnutzen, um direkt zu zeigen, dass $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ über alle P-Ideale iteriert werden kann ohne die *allgemeine* Kontinuumshypothese zu zerstören. Der Beweis des entsprechenden Forcingaxioms funktioniert analog.

[31] [Abr10, S.390]

4 Die Konsistenz von $\mathsf{PID} + \mathsf{GCH}$

4.1 Die Iteration von $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ über alle P-Ideale

Die Iteration von $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ über Ideale auf beliebig großen Grundmengen S benötigt – wie der Konsistenzbeweis für PFA – superkompakte Kardinalzahlen; insbesondere eine geeignete *Laver-Funktion*, dich sich aus der Existenz einer superkompakten Kardinalzahl ergibt.

Bemerkung 4.1. Nachdem große Kardinalzahlen nicht das Thema dieser Arbeit sein sollen, werde ich auch bezüglich den Eigenschaften superkompakter Kardinalzahlen auf die Literatur – insbesondere [Kan09] – verweisen. Wichtig sind nur folgende Begrifflichkeiten und Fakten:

- Für eine *messbare* Kardinalzahl κ gibt es einen κ-vollständigen Ultrafilter über κ.
- Über solch einem Ultrafilter U können wir die Ultrapotenz $Ult(\mathbf{V}, U)$ und deren transitiven Kollaps M bilden; die zugehörige elementare Einbettung j von $\mathbf{V}$ nach M geben wir kurz als $j : \mathbf{V} \prec M$ an.
- Für solch ein Modell M gilt $[M]^\kappa \subseteq M$ und κ ist der *kritische Punkt* der zugehörigen elementaren Einbettung j, d.h. die kleinste Kardinalzahl γ so, dass $j(\gamma) > \gamma$.

Das Ziel superkompakter Kardinalzahlen ist es, diese Eigenschaft auf *größere* Kardinalzahlen auszuweiten:

Definition 4.1. Seien $\kappa < \gamma$ Kardinalzahlen.

- [32] κ heißt *γ-superkompakt*, wenn es eine elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ gibt so, dass κ der kritische Punkt von j ist und $j(\kappa) > \gamma$ und $[M]^\gamma \subseteq M$ gelten.

  κ heißt *superkompakt*, wenn κ für jedes $\gamma \geq \kappa$ immer γ-superkompakt ist.

  Wir bezeichnen mit SC das Axiom „Es existiert eine superkompakte Kardinalzahl“.
- [33] Sei κ superkompakt. Eine Funktion $f : \kappa \to \mathbf{V}_\kappa$ heißt *Laver-Funktion*, wenn für jede Menge x und jedes $\lambda \geq \max(\kappa, |tcl(x)|)$ ein Ultrafilter auf κ und eine entsprechende elementare Einbettung $j_{\lambda,x} : \mathbf{V} \prec M_{\lambda,x}$ existiert so, dass $(j_{\lambda,x}(f))(\kappa) = x$.

Wichtig ist für uns insbesondere, wie Laver in [Lav78] zeigt, dass eine solche Funktion für jede superkompakte Kardinalzahl existiert. Diese Tatsache können wir nun (analog zu den klassischen Konsistenzbeweisen von Forcingaxiomen) ausnutzen. Hierfür definieren wir folgende Iteration:

Definition 4.2. Es gelte GCH+SC und $f : \kappa \to \mathbf{V}_\kappa$ sei eine Laver-Funktion auf der superkompakten Kardinalzahl κ. Wir definieren die countable support Iteration $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi \leq \kappa}$ folgendermaßen:

[32] [Kan09, S.298]
[33] [Lav78]

Wenn $f(\xi) = (\dot{\mathcal{I}}, \dot{S})$ so, dass $\dot{\mathcal{I}}$ ein $\mathcal{P}_\xi$-Name für ein P-Ideal $\mathcal{I}$ auf einer überabzählbaren Ordinalzahl S ist so, dass S nicht in abzählbar viele Mengen außerhalb von $\mathcal{I}$ zerlegt werden kann, aber jede kleinere Ordinalzahl schon, dann setze $\dot{\mathcal{Q}}_\xi$ als den $\mathcal{P}_\xi$-Namen für die entsprechende Forcingordnung $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$. Andernfalls setze $\dot{\mathcal{Q}}_\xi$ als den $\mathcal{P}_\xi$-Namen für die triviale Forcingordnung.

Diese Iteration hat nun folgende Eigenschaften:

Lemma 4.1. [34]

(a) $\mathcal{P}_\kappa$ *fügt keine neuen reellen Zahlen hinzu,*

(b) $\mathcal{P}_\kappa$ *hat die* κ*-c.c. und erhält somit alle Kardinalzahlen* $\geq \kappa$*,*

(c) $\mathcal{P}_\kappa$ *kollabiert* κ *auf* $\omega_2^{\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa}}$*,*

(d) $\mathcal{P}_\kappa$ *erhält* GCH*.*

Beweis. (a) Folgt aus Satz 3.6 und Korollar 3.8.

(b) κ ist superkompakt und damit insbesondere stark unerreichbar, also regulär und es gilt $\mu^\omega < \kappa$ für alle $\mu < \kappa$. Die einzelnen Forcingordnungen $\dot{\mathcal{Q}}_i$ sind außerdem Bilder unserer Laver-Funktion f und liegen somit in $\mathbf{V}_\kappa$, haben also Mächtigkeit $< \kappa$. Mit Lemma 1.3 folgt, dass $\mathcal{P}_\kappa$ die κ-c.c. hat.

(c) Wir können annehmen, dass für jedes $\gamma < \kappa$ eine reguläre Kardinalzahl $S > \gamma$ und ein Ideal $\mathcal{I}$ auf S existiert, das im Iterationsverlauf von der Laver-Funktion f getroffen wird. Entsprechend liefert ein generischer Filter eine Folge $(x_{p_i})_{i<\lambda}$ so, dass (nach Aufbau der Ordnung $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$) jedes x_{p_i} abzählbar ist, eine Enderweiterung von x_{p_j} für jedes $j < i$ ist und $\bigcup_{i<\lambda} x_{p_i}$ konfinal in S liegt, wodurch S (und somit auch jedes $\gamma < S$) auf Mächtigkeit ω_1 kollabiert wird.

(d) Mit (a) und $\mathbf{V} \models \mathsf{GCH}$ folgt $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa} \models (2^\omega = \omega_1)$. Sei also $\theta \geq \kappa$ beliebig und $\dot{f} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa}$ ein Name für eine Funktion $f : \theta \to 2$. Entsprechend gibt es für jedes $\alpha < \theta$ zwei Antiketten A_0, A_1 aus Bedingungen, die $f(\alpha) = 1$ bzw. $f(\alpha) = 0$ festlegen so, dass $A_0 \cup A_1$ eine maximale Antikette ist (d.h. A_i ist maximal *in* $\left\{p \in \mathcal{P}_\kappa \mid p \Vdash (\dot{f}(\alpha) = i)\right\}$). Nach (b) gibt es nur $|[\kappa]^{<\kappa}| = \kappa$ viele verschiedene Antiketten, und somit nur $\kappa^\theta \leq \theta^\theta = \theta^+$ viele (in der Auswertung) verschiedene Namen für f, also $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa} \models (2^\theta = \theta^+)$.

Analog (mit $\kappa^{\omega_1} = \kappa$ und (c)) folgt $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa} \models (2^{\omega_1} = \omega_2)$.

□

Wir haben somit alle Mittel, um endlich unser beabsichtigtes Resultat zu zeigen:

[34] Vielen Dank an Christoph Bier für die Hilfe bei den folgenden Beweisen.

Satz 4.2. [35] *Es gelte* $\mathsf{GCH{+}SC}$*. Dann erzwingt* $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi\leq\kappa}$ *die Gültigkeit von* $\mathsf{GCH} + \mathsf{PID}$*.*

Beweis. Sei $\dot{\mathcal{I}}$ ein ($\mathcal{P}_\kappa$-Name für ein) beliebiges geeignetes P-Ideal auf einer überabzählbaren Ordinalzahl S. Nach Vorraussetzung finden wir für eine hinreichend große (reguläre) Kardinalzahl λ eine Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ mit kritischem Punkt κ, $[M]^\lambda \subseteq M$, $j(\kappa) > \lambda$ und $(j(f))(\kappa) = (\dot{\mathcal{I}}, \dot{S})$.

Es gilt nun $j((\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi<\kappa}) = (\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi<j(\kappa)}$ und wegen der Elementarität von j und nachdem κ der kritische Punkt von j ist, ist $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi<j(\kappa)}$ in M eine countable support Iteration, die für alle Werte $< \kappa$ mit der ursprünglichen Iteration übereinstimmt. Entsprechend ist in M per Wahl der Einbettung $\dot{\mathcal{Q}}_\kappa$ ein $\mathcal{P}_\kappa$-Name für die Forcingordnung $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ für das Ideal $\mathcal{I}$ mit $(j(f))(\kappa) = (\dot{\mathcal{I}}, \dot{S})$. Nach Korollar 2.2 erzwingt $\dot{\mathcal{Q}}_\kappa$ somit die Existenz einer überabzählbaren Menge T innerhalb von $\mathcal{I}$. Man beachte nun, dass j als elementare Einbettung problemlos zu einer elementaren Einbettung $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa} \to M^{\mathcal{P}_{j(\kappa)}}$ erweiterbar ist. Nachdem außerdem $[M]^\lambda \subseteq M$ gilt, ist $i := j \restriction \lambda \in M$ und i bildet den Namen $\dot{T}$ auf einen Namen $\dot{T}' \in M^{\mathcal{P}_{j(\kappa)}}$ ab so, dass in $M^{\mathcal{P}_{j(\kappa)}}$ mit $\dot{T}'$ als Zeuge Bedingung (1) der PID für das P-Ideal $i(\mathcal{I})$ erfüllt ist.

Nach Elementarität gilt also in $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa}$ die PID für jedes $\dot{\mathcal{I}}$ und somit folgt $\mathbf{V}^{\mathcal{P}_\kappa} \models \mathsf{PID} + \mathsf{GCH}$. □

Wir haben also

Korollar 4.3. $\mathit{Con}(\mathit{ZFC} + \mathit{SC}) \Rightarrow \mathit{Con}(\mathit{ZFC} + \mathit{GCH} + \mathit{PID})$

[35] [Tod00, 265]

4.2 Die *Properness Isomorphism Condition*

Wie bereits erwähnt können wir die Konsistenz von PID_{ω_1} auch ohne große Kardinalzahlen zeigen. Das Hauptproblem ist hierbei, dass bei der Iteration alle Kardinalzahlen erhalten bleiben sollen. Im vorherigen Abschnitt haben wir dafür die κ-c.c. ausgenutzt; bei einer entsprechend kleineren Iteration wird dies etwas aufwendiger. Glücklicherweise hilft uns dabei die Properness Isomorphism Condition (*p.i.c.*):

Definition 4.3. [36]

- Sei $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung und $M_0, M_1 \prec H_\theta$ abzählbare isomorphe elementare Unterstrukturen für hinreichend großes θ, die $\mathcal{P}$ enthalten. Sei außerdem $h : M_0 \to M_1$ ein Isomorphismus, der auf $M_0 \cap M_1$ die Identität darstellt und es gelte für eine feste reguläre Kardinalzahl κ:

  $$\forall \alpha \in M_0 \cap M_1 \cap \kappa \, \forall \beta \in (M_0 \setminus M_1) \cap \kappa \, (\alpha < \beta)$$

  und

  $$\forall \beta \in (M_0 \setminus M_1) \cap \kappa \, \forall \gamma \in (M_1 \setminus M_0) \cap \kappa \, (\beta < \gamma).$$

  Eine Bedingung $p \in \mathcal{P}$ heißt *simultan M_0- und M_1-generisch*, wenn p sowohl M_0- als auch M_1-generisch ist und

  $$p \Vdash \forall r \in M_0 \cap \mathcal{P} \, (r \in \dot{G} \leftrightarrow h(r) \in \dot{G})$$

- Eine Forcingordnung $\mathcal{P}$ hat die *κ-Properness Isomorphism Condition (κ-p.i.c.)*, wenn für alle geeigneten Modelle M_0, M_1 (wie im vorherigen Punkt) und jedes $p \in M_0 \cap \mathcal{P}$ ein $q \leq p$ existiert, das simultan M_0- und M_1-generisch ist (und somit auch $q \leq h(p)$).

Das praktische an diesen Forcingordnungen ist, dass sie (für geeignete κ) die κ-c.c. erfüllen:

Lemma 4.4. [37] *Sei κ eine reguläre Kardinalzahl mit $\mu^\omega < \kappa$ für alle $\mu < \kappa$. Dann impliziert die κ-p.i.c. die κ-c.c.*

Beweis. Sei also $\mathcal{P}$ eine Forcingordnung, die die κ-p.i.c. erfüllt. Wir können sogar zeigen, dass jede Folge $(p_i)_{i<\kappa}$ in $\mathcal{P}$ eine Teilmenge paarweise kompatibler Bedingungen der Mächtigkeit κ enthält. Dazu wählen wir zu jedem $i < \kappa$ eine abzählbare elementare Unterstruktur $M_i \prec H_\lambda$ (für hinreichend großes λ) mit $p_i \in M_i$. Betrachte $\{M_i \cap \kappa \mid i < \kappa\}$, dann können wir wegen $\mu^\omega < \kappa$ für alle $\mu < \kappa$ den Δ-System-Satz (Satz 1.4) anwenden und finden eine Teilmenge $I \subseteq \kappa$ so, dass $\{M_i \cap \kappa \mid i \in I\}$ ein Δ-System ist. Für $i, j \in I$ mit $i < j$ erfüllen also M_i, M_j die Vorraussetzungen aus Definition 4.3. Wir können außerdem o.B.d.A. annehmen, dass ein Isomorphismus h existiert mit $h(p_i) = p_j$. Dann gibt es nach κ-p.i.c. also ein $q \leq p_i, p_j$, also ist die Folge $(p_i)_{i<\kappa}$ keine Antikette. □

[36] [Abr10, S.390f]
[37] [Abr10, S.391]

Im Gegensatz zur κ-c.c. alleine lässt sich die κ-p.i.c. jedoch auch bei Iterationen leicht erhalten. Dafür brauchen wir das entsprechende Extensionslemma, für dessen Beweis ich wieder auf die angegebene Literatur verweise:

Lemma 4.5. (p.i.c.-Extension Lemma)[38] *Sei $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi\leq\gamma}$ eine countable support Iteration der Länge $\gamma < \kappa$ von κ-p.i.c. Forcingordnungen und $M_0, M_1 \prec H_\theta$ für hinreichend großes θ wie in Definition 4.3. Dann gilt für jedes $\gamma_0 \in \gamma \cap M_0$ und simultan M_0- und M_1-generische $q_0 \in \mathcal{P}_{\gamma_0}$:*

> *Wenn für $\dot{p}_0 \in \boldsymbol{V}^{\mathcal{P}_{\gamma_0}}$ gilt $q_0 \Vdash (\dot{p}_0 \in \mathcal{P}_\gamma \cap M_0)$ und $\dot{p}_0 \restriction \gamma_0 \in \dot{G}_0$ (wobei $\dot{G}_0$ der kanonische Name für den generischen Filter über $\mathcal{P}_{\gamma_0}$ ist), dann gibt es eine Bedingung $q \in \mathcal{P}_\gamma$ so, dass $q \restriction \gamma_0 = q_0$, $q \Vdash (\dot{p}_0 \in \dot{G})$ und q ist simultan M_0- und M_1-generisch.*

Es folgt nun:

Satz 4.6. [39] *Sei κ eine reguläre Kardinalzahl mit $\mu^\omega < \kappa$ für alle $\mu < \kappa$. Ist $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi\leq\kappa}$ eine countable support Iteration von Forcingordnungen, die die κ-p.i.c. erfüllen, dann erfüllt die Iteration die κ-c.c. und erhält somit alle Kardinalzahlen $\geq \kappa$.*

Beweis. Wie im vorherigen Beweis betrachten wir eine Folge von Bedingungen $(p_i)_{i<\kappa}$ in $\mathcal{P}_\kappa$. Nach Vorraussetzung ist $\kappa \geq \omega_2$ und $\mathcal{P}_\kappa$ eine countable support Iteration – Für jede der Bedingungen p_i hat also $\sup(i \cap \mathrm{dom}(p_i))$ eine obere Schranke $< \kappa$, o.B.d.A. mit überabzählbarer Konfinalität. Wir können also das Pressing-Down-Lemma und den Δ-System-Satz (Satz 1.4) anwenden und finden eine gemeinsame obere Schranke i_0 für eine stationäre Teilmenge $I \subseteq \kappa$ so, dass $(\mathrm{dom}(p_i))_{i\in I}$ ein Δ-System bildet. Entsprechend reicht es zu zeigen, dass die Teiliteration $\mathcal{P}_{i_0}$ die κ-c.c. hat. Aus Lemma 4.5 folgt aber:

> Ist $(\mathcal{P}_\xi, \dot{\mathcal{Q}}_\xi)_{\xi\leq\gamma}$ für $\gamma < \kappa$ eine countable support Iteration von κ-p.i.c. Forcingordnungen, dann erfüllt P_γ die κ-p.i.c.

und somit folgt die Behauptung. □

Natürlich ist jedes P-Ideal über ω_1 eine Teilmenge von $[\omega_1]^{\leq\omega}$. Es gibt also unter GCH höchstens $\left|\mathfrak{P}([\omega_1]^{\leq\omega})\right| = 2^{(\omega_1^\omega)} = 2^{\omega_1} = \omega_2$-viele P-Ideale über ω_1.

Außerdem gilt dank Kontinuumshypothese $\omega_1^\omega = \omega_1 < \omega_2$. Wenn wir also zeigen können, dass $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ für Ideale über ω_1 die ω_2-p.i.c. besitzt, können wir problemlos in einem Modell von GCH über alle entsprechenden P-Ideale iterieren, dabei alle Kardinalzahlen erhalten (da ω_1 wegen $\mathbb{D}$-Vollständigkeit ohnehin erhalten bleibt) und (analog zu Lemma 4.1.(d)) PID_{ω_1} erzwingen ohne GCH zu zerstören.

[38] [Abr10, S.393]
[39] [Abr10, S.391f]

Satz 4.7. [40] *Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal über ω_1. Dann hat $\mathcal{P}_\mathcal{I}$ die ω_2-p.i.c.*

Beweis. Seien also Modelle M_0, M_1 wie in Definition 4.3 (für $\kappa = \omega_2$) und $p_0 \in M_0 \cap \mathcal{P}_\mathcal{I}$ gegeben. Wir werden wieder das Konstruktionsverfahren aus dem Beweis von Satz 2.3 verwenden, um das gesuchte simultan M_0- und M_1-generische Element q zu finden.

Diesmal müssen wir bei der Konstruktion von p_{m+1} aus einem bereits gegebenen p_m nicht nur die konfinalen Mengen $X \in \mathcal{X}_{p_i}$ für $i \leq m$ beachten, sondern auch deren Bilder $h(X)$ unter dem Isomorphismus $h : M_0 \to M_1$. Sei also so ein X gegeben. Mit $p_m \leq p_i$ gilt natürlich auch $h(p_m) \leq h(p_i)$ und nach Vorraussetzung ist nun $\mathcal{I}$ ein P-Ideal über $\omega_1 < \omega_2$ – nach Isomorphie muss nun $M_0 \cap \omega_1 = M_1 \cap \omega_1$ gelten und nach Definition 4.3 ist damit h die Identität auf $\mathcal{I} \cap M_0$, also $x_{h(p_i)} = x_{p_i}$ für alle $i \leq m$.

Entsprechend ist also auch die Menge $X_1 = \{A \in h(X) \mid x_{p_m} \setminus x_{p_i} \subseteq z_A\}$ konfinal in $[\mathcal{I}]^\omega$ und es gibt (genau wie vorher) eine (zweite) endliche Menge $c' \subset M_0 \cap \omega_1$ so, dass auch $X_2 = \{A \in X_1 \mid z_{M_0 \cap \mathcal{I}} \subseteq z_A \cup c\}$ konfinal ist (wobei $I \subseteq^* z_{M_0 \cap \mathcal{I}}$ für alle $I \in \mathcal{I}$). Die Konstruktion der Folge $(p_n)_{n\in\omega}$ kann nun mit beiden endlichen Mengen genau wie bei Satz 2.3 durchgeführt werden. Schließlich definieren wir $x_q = \bigcup_{n\in\omega} x_{p_n}$ und $\mathcal{X}_q = \bigcup_{n\in\omega}(\mathcal{Y}_n \cup \mathcal{Z}_n)$, wobei

$$\mathcal{Y}_n = \mathcal{X}_{p_n} \cup \{\{A \in X \mid x_q \setminus x_{p_n} \subseteq z_A\} \mid X \in \mathcal{X}_{p_n}\}$$

und

$$\mathcal{Z}_n = h[\mathcal{X}_{p_n}] \cup \{\{A \in h(X) \mid x_q \setminus x_{p_n} \subseteq z_A\} \mid X \in \mathcal{X}_{p_n}\}.$$

q ist nun per Konstruktion eine M_0- und M_1-generische Bedingung, die sowohl jedes p_i also auch deren Bilder $h(p_i)$ erweitert. Entsprechend erzwingt q, dass $\dot{G} \cap M_0$ von der Folge $(p_n)_{n\in\omega}$ erzeugt wird und $\dot{G} \cap M_1$ von der Folge $(h(p_n))_{n\in\omega}$; q ist also simultan M_0- und M_1-generisch. □

Wir können also somit auch folgern:

Korollar 4.8. $\mathsf{Con}(\mathsf{ZFC}) \Rightarrow \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC} + \mathsf{GCH} + \mathsf{PID}_{\omega_1})$

[40][Tod00, S.264]

5 Anhang

5.1 Tabelle der verwendeten Notationen

$\mathfrak{P}(X)$	Die Potenzmenge von X.
$A \subseteq^* B$	$A \setminus B$ ist endlich („A ist Teilmenge von B modulo endlichem Rest“).
$\mathsf{otp}(A)$	Der Ordnungstyp der Menge A bezüglich einer aus dem Kontext ersichtlichen Wohlordnung.
$[X]^\kappa$	$\{A \in \mathfrak{P}(X) \mid \lvert A\rvert = \kappa\}$
$[X]^{<\kappa}$	$\{A \in \mathfrak{P}(X) \mid \lvert A\rvert < \kappa\}$ (Analog für $[X]^{\leq\kappa}$).
${}^\kappa X$	Die Menge aller geordneten κ-Tupel über X (Äquivalent: Die Menge aller Funktionen $\kappa \to X$).
κ^+	Der Kardinalzahlnachfolger der Kardinalzahl κ.
$f[A]$	Für eine Funktion $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ die Menge $\{f(x) \mid x \in A\}$.
$M \prec N$	M ist eine elementare Unterstruktur von N.
PID	Die P-Ideal-Dichotomie (siehe Kapitel 1.1).
GCH	Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (Für alle Kardinalzahlen κ gilt $2^\kappa = \kappa^+$).
PFA	Das Proper Forcing Axiom (siehe Kapitel 2.2).
PID_{ω_1}	Die P-Ideal-Dichotomie eingeschränkt auf Grundmengen der Mächtigkeit ω_1.
ZF^- bzw. ZFC^-	ZF bzw. ZFC jeweils ohne das Potenzmengenaxiom.
$tcl(a)$	Die transitive Hülle von a.
H_κ	Die Menge aller Mengen, deren transitive Hülle Mächtigkeit $< \kappa$ hat.
SC	Das Axiom „Es existiert eine superkompakte Kardinalzahl“.
$Gen_p(M, \mathcal{P})$	Die Menge aller M-generischen Filter über einer Forcingordnung $\mathcal{P}$, die p enthalten.
$cf(\kappa)$ bzw. $cf([X]^\lambda)$	die Konfinalität der Kardinalzahl κ bzw. der Menge $[X]^\lambda$ bezüglich $\subseteq$.
$M \models \varphi$	in M gilt die Formel φ.
$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi$	Das Element p der Forcingordnung $\mathcal{P}$ erzwingt die Gültigkeit der Formel φ in jeder entsprechenden Erweiterung (Forcingrelation).
$M^{\mathcal{P}}$	Die Menge aller $\mathcal{P}$-Namen in M (bzw. eine unspezifische Forcingerweiterung von M über $\mathcal{P}$.)
$\dot{a}$	Ein (bzw. der kanonische) Name für die/eine Menge a.
$\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$	Die Zweischritt-Iteration von $\mathcal{P}$ und $\dot{\mathcal{Q}} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$.
$M[G]$	Die konkrete Forcingerweiterung des Modells M unter dem Filter G.
$\dot{a}^G$	Die Auswertung des Namens $\dot{a} \in \mathbf{V}^{\mathcal{P}}$ unter dem Filter G.
$\mathbf{V}_\alpha$	die α-te Stufe in der Von-Neumann-Hierarchie.

Tabelle 1: Verwendete Notationen

5.2 Literaturverzeichnis

[Abr10] U. Abraham. Proper forcing. In M. Foreman and A. Kanamori, editors, *Handbook of Set Theory*, pages 333–394. Springer Netherlands, 2010.

[Jec73] T. Jech. Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals. *Annals of Mathematical Logic*, 5(3):165 – 198, 1973.

[Kan09] A. Kanamori. *The Higher Infinite, 2nd Edition.* Springer Monographs in Mathematics, 2009.

[Kun92] K. Kunen. *Set Theory - An Introduction to Independence Proofs.* Studies in logic and the foundations of mathematics. Elsevier Science Publishers, 1992.

[Lav78] R. Laver. Making the supercompactness of κ indestructible under κ-directed closed forcing. *Israel Journal of Mathematics*, 29:385–388, 1978.

[MV10] J.T. Moore and G. Venturi. The proper forcing axiom: a tutorial. Young Set Theory Workshop 2010, Raach, Austria, 2010.

[She98] S. Shelah. *Proper and improper forcing.* Perspectives in mathematical logic. Springer, 1998.

[TA97] S. Todorčević and U. Abraham. Partition properties of ω_1 compatible with CH. *Fundamenta Mathematicae*, 152:165–181, 1997.

[TCF$^+$14] S. Todorčević, C.T. Chong, Q. Feng, Y. Yang, T.A. Slaman, and W.H. Woodin. *Notes on Forcing Axioms.* Lecture Notes Series - National University of Singapore, Institute for Mathematical Sciences. World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2014.

[Tod00] S. Todorčević. A dichotomy for p-ideals of countable sets. *Fundamenta Mathematicae*, 166:251–267, 2000.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel verwendet habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe. Darüber hinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

Datum: Unterschrift: