- κ is weakly inaccessible iff κ is a regular limit cardinal and inaccessible, if in addition closed under powersets.
- κ limit, then $C \subseteq \kappa$ is *closed in* κ iff for every $\alpha < \kappa$: if α is a limit point of C (i.e. $\bigcup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$), then $\alpha \in C$.
  C is *unbounded in* κ iff for $\alpha < \kappa$ there is some $\beta \in C$ such that $\alpha < \beta$
- For limit ordinals δ, S is stationary in δ iff $S \subseteq \delta$ and $S \cap C \neq \emptyset$ for any C closed unbounded in δ.
- κ is *weakly Mahlo* iff $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is regular}\}$ is stationary in κ and strongly Mahlo iff $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is strongly inaccessible}\}$ is stationary. Weakly Mahlo cardinals are weakly inaccessible.

Reflektionsprinzip von Montague und Levi: *Für jede Formel $\varphi(x_1, ..., x_n)$ und jede Ordinalzahl β gibt es eine Limeszahl $\lambda > \beta$ so dass für alle $a_1, ..., a_n \in V_\lambda$:*

$$\varphi(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow (\varphi(a_1, ..., a_n))^{V_\lambda}$$

Reflektionsprinzip ist äquivalent zu (Unendlichkeitsaxiom+Ersetzungsschema)
Wir betrachten Strukturen der Form $\langle V_\kappa, \in, R\rangle$ mit $R \subseteq V_\kappa$ einstellige Relation.

Lemma 1. *Sei κ unerreichbar und $R \subseteq V_\kappa$. Dann ist*

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle\}$$

ein Club in κ.

Beweis.

1. *Abgeschlossen*: Offensichtlich; da die Vereinigung über eine elementare Kette wieder eine elementare Unterstruktur liefert (Tarski's Kettenlemma).

2. *Unbeschränkt:* Sei $\alpha < \kappa$. Definiere $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rekursiv:

   $\alpha_0 := \alpha$
   Ist α_n gegeben, definiere α_{n+1} als kleinstes $\beta \geq \alpha_n$ mit folgender Eigenschaft:
   Wenn $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \exists v_0\ \varphi(v_0, \gamma_1, ..., \gamma_k)$ für irgendeine Formel φ mit Parametern $\gamma_1, ..., \gamma_k \in V_{\alpha_n}$, dann gibt es ein $\gamma \in V_\beta$ mit $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi(\gamma, \gamma_1, ..., \gamma_k)$
   Nachdem κ unerreichbar ist, gilt $|V_{\alpha_n}| < \kappa$ und entsprechende $\alpha_{n+1} < \kappa$.

   Definiere nun $\beta := \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, so gilt nach dem Tarski-Kriterium $\langle V_\beta, \in, R \cap V_\beta\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$ und per Konstruktion $\beta > \alpha$.

□

Satz 1. *(a) κ ist stark unerreichbar genau dann, wenn für jedes $R \subseteq V_\kappa$ ein $\alpha < \kappa$ existiert, so dass $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$.*

(b) κ ist stark Mahlo genau dann, wenn für jedes $R \subseteq V_\kappa$ eine unerreichbare Kardinalzahl $\alpha < \kappa$ existiert, so dass $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$

Proof. Aus Lemma 1 folgen beide Hinrichtungen. (a) weil die Menge unbeschränkt ist (also nicht leer), (b) weil 1. Mahlo Kardinalzahlen unerreichbar sind und 2. per Definition der Schnitt jeder Club-Menge mit der Menge aller unerreichbaren $\alpha < \kappa$ nicht leer ist.
Für die Rückrichtung: Es gilt offensichtlich $\kappa > \omega$.

1. *κ ist regulär:* Angenommen κ wäre singulär, dann gäbe es also eine kofinale Abbildung $f : \beta \to \kappa$ mit $\beta < \kappa$. Sei $R = f \cup \{\beta\}$. Nach Vorraussetzung gibt es ein $\alpha < \kappa$ so dass $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$. Nachdem β die einzige Ordinalzahl in R ist, gilt $\beta \in V_\alpha$ (weil elementare Unterstruktur), also ist $\mathsf{Dom}(f \cap V_\alpha) = \beta$. Nachdem f aber kofinal ist würde das bedeuten $\alpha \geq \kappa$, widerspruch.

2. *κ ist starker limes:* Angenommen, es gibt $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$. Sei also $f(\mathcal{P}(\lambda)) \to \kappa$ surjektiv und $R = f \cup \{\lambda + 1\}$. Wie vorher gibt es ein entsprechendes α und es muss gelten $\lambda + 1 \in V_\alpha$ und entsprechend $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\alpha$, widerspruch.

3. *(b): κ ist Mahlo:* Falls nicht, gibt es also einen club $C \subseteq \kappa$ der keine unerreichbare Kardinalzahl enthält. Für $R = C$ gibt es aber wegen (b) ein unerreichbares $\alpha < \kappa$ mit (Unterstruktur). Wegen Elementarheit muss $C \cap \alpha$ auch in α unbeschränkt sein. Dann gilt aber $\alpha \in C$ (weil Supremum und C club), widerspruch.

□

Gilt das Reflexionsprinzip in einem beliebigen V_κ für eine beliebige Relation $R \subseteq V_\kappa$, so muss nach Satz 1(a) κ unerreichbar sein (Reflektion).
Behaupten wir *innerhalb* von V_κ, dass das Reflexionsprinzip für ein V_α gilt, so muss κ nach Satz 1(b) Mahlo sein (Reflektion der Reflektion...).
Levi: $\Rightarrow$ Hierarchie von ZFC-Modellen; entspricht den α-Mahlo Kardinalzahlen.

- Eine Variable ist typ 1, wenn normale Variable, typ 2, wenn aus der Potenzmenge, typ n wenn aus n-facher Iteration der Potenzmengenrelation. Eine Formel ist Σ^m_n, wenn sie mit einem Block von universellen Quantoren über typ $m+1$ Variablen rangiert und $n-1$ unbeschränkte Quantorenwechsel hat.

Hanf/Scott:

Definition 1. Sei $Q = \Sigma^m_n$ oder Π^m_n. κ heißt *Q-unbeschreibbar* gdw für jedes $R \subseteq V_\kappa$ und jeden Q-Satz φ mit $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ es ein $\alpha < \kappa$ gibt, so dass $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$.
Eine Kardinalzahl heißt *total unbeschreibbar*, wenn sie Π^m_n-unbeschreibbar ist für alle $m, n \in \omega$.

Mehrstufige Logik(!). Fordern wir (echt zweitstufig!) für **On** die Π^1_n-unbeschreibbarkeit (für jedes $n \in \omega$), so ist dies äquivalent zum globalen Auswahlaxiom.
Nachdem V_κ unter Paarbildung abgeschlossen ist, lässt sich jede endliche Menge endlichstelliger Relationen als obige einstellige Relation R darstellen. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $m = 1$:

Satz 2. *a) Für jedes $n \in \omega$ gilt: κ ist Σ^1_{n+1}-unbeschreibbar gdw κ auch Π^1_n-unbeschreibbar ist.*

b) κ ist Σ^1_1-unbeschreibbar gdw κ unerreichbar ist.

Proof. a) Ist $\psi \in \Sigma^1_{n+1}$, so ist $\psi = \exists X \varphi$ für X typ 2 und $\varphi \in \Pi^1_n$. Gelte also $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \exists X \varphi(X)$, also gibt es ein $S \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi(S)$. Dann kann ich X in φ ersetzen durch ein neues einstelliges Relationssymbol S und die Behauptung folgt (mit obigem Argument) aus der Unbeschreibbarkeit für $\langle V_\kappa, \in, R, S\rangle$.

b) Man reduziere sich wie in a) auf typ 1 Variablen und verfahre wie in Satz 1a).

□

Nächster Schritt: Π^1_1

- $L_{\lambda\mu}$: Konjunktion/Disjunktion von λ vielen Formeln in μ vielen Variablen (Frei oder gebunden).
  Eine Klasse von $L_{\lambda\mu}$-Sätzen ist ν-erfüllbar, wenn jede Teilmenge mit weniger als ν Formeln erfüllbar ist.
- κ heißt *schwach kompakt* gdw für jede Klasse T von $L_{\kappa\kappa}$-Sätzen mit höchstens κ vielen nicht-logischen Symbolen gilt: Wenn T κ-erfüllbar ist, ist T erfüllbar.
- κ ist schwach kompakt genau dann, wenn gilt: Für jedes $R \subseteq V_\kappa$ gibt es eine transitive Menge $X \neq V_\kappa$ und $S \subseteq X$ so dass $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ (Extensionseigenschaft).
  Schwach kompakte Kardinalzahlen sind unerreichbar S. 39

Satz 3. *κ ist Π^1_1-unbeschreibbar gdw κ schwach kompakt ist.*

Proof. Angenommen κ ist unerreichbar und es gibt für $R \subseteq V_\kappa$ ein $X \neq V_\kappa$ transitiv mit $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$. Wegen Löwenheim-Skolem können wir o.B.d.A. annehmen $|X| = |V_\kappa|$. Gegeben eine Injektion von X nach V_κ entspricht dies der Behauptung, dass ein $A \subseteq V_\kappa$ existiert, das eine Struktur $\langle Y, E, V\rangle$ codiert, bei der E die Vorraussetzung für den Mostowski-Kollaps erfüllt. Dadurch erhalten wir eine elementare Einbettung $J : \langle V_\kappa, \in, R\rangle \to \langle Y, E, V\rangle$. Dass E fundiert ist lässt sich erstufig in $\langle V_\kappa, \in, E\rangle$ ausdrücken. Dass J elementar ist entspricht der Behauptung, dass eine erfüllende Sequenz K existiert (definiert über Komplexität von Formeln). Die Extensionseigenschaft gilt also genau dann für R, wenn $\langle V_\kappa, \in, R\rangle$ einen bestimmten Σ^1_1-Satz $\exists A \exists J \exists K \varphi$ erfüllt, für φ erststufig.

$\Rightarrow$ Sei κ also Π^1_1-unbeschreibbar (und somit nach Satz 2b) unerreichbar). Angenommen die Extensionseigenschaft gilt *nicht* für irgendein $R \subseteq V_\kappa$, dann ist die Negation von obigem Satz also ein Π^1_1-Satz σ und $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \sigma$. Unerreichbarkeit lässt sich als Π^1_1-Satz τ ausdrücken und dass (nach Lemma 1) die Menge $C := \{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle\}$ ein Club ist lässt sich in $\langle V_\kappa, \in, R, C\rangle$ als erstufige Formel ψ ausdrücken. Nach Unbeschreibbarkeit gibt es also ein $\alpha < \kappa$ so, dass

$$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha, C \cap V_\alpha\rangle \models \sigma \wedge \tau \wedge \psi$$

Insbesondere ist wegen τ also α unerreichbar und $\alpha \in C$. Durch iterieren der Skolem-Hülle erhalten wir ein $\langle X_\alpha, \in, S_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$ so dass X_α transitiv, $V_\alpha \subsetneq X_\alpha$ und $|V_\alpha| = |X_\alpha|$. Nachdem $\alpha \in C$ erhalten wir $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle X_\alpha, \in, S_\alpha\rangle$, was der Extensionseigenschaft entspricht, im Widerspruch zu $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \sigma$.

$\Leftarrow$ Sei κ schwach kompakt und $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \psi$ für irgendein $\psi \in \Pi^1_1$. Dann gibt es also ein transitives $X \neq V_\kappa, S \subseteq X$, so dass $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$. Insbesondere ist $\langle X, \in\rangle$ ein transitives ZFC-Modell mit $\kappa \in X$ und somit $V^X_\kappa = V_\kappa \in X$. Die einzigen Typ-2-Quantoren in ψ sind universell, bleiben also abwärts erhalten. Wir bekommen also:

$$\langle X, \in, S\rangle \models \exists \alpha (\langle V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha\rangle \models \psi)$$

(z.B. für $\alpha = \kappa$). Dieser Satz ist nun aber erststufig, gilt also auch in V_κ (weil elementare Unterstruktur). Nachdem κ unerreichbar ist existiert also tatsächlich so ein $\alpha < \kappa$ und die Behauptung folgt.

□

Zusammenhang zu messbaren Kardinalzahlen:

- Normaler Ultrafilter: F ist normal, wenn für alle $(X_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in F^\lambda$ der diagonale Schnitt $\left\{\xi < \lambda \mid \xi \in \bigcap_{\alpha < \xi} X_\alpha\right\} \in F$
  Ist κ messbar, dann gibt es einen normalen Ultrafilter über κ (Man nehme κ-vollständigen Ultrafilter U und $f : \kappa \to \kappa$ mit $[f]_U = \kappa$, dann ist $\left\{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in U\right\}$).
- (Tobias, Proposition 6a): Sei U ein κ-vollständiger Ultrafilter über $\kappa > \omega$ und $j : V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ die entsprechende Einbettung. Dann gilt: $j(x) = x$ für jedes $x \in V_\kappa$ und entsprechend $V^M_\kappa = V_\kappa$, $j(X) \cap V_\kappa = X$ für jedes $X \subseteq V_\kappa$ und damit auch $V^M_{\kappa+1} = V_{\kappa+1}$ und $\kappa^{+M} = \kappa^+$

Satz 4. *Messbare Kardinalzahlen sind Π^2_1-unbeschreibbar. Mehr noch: ist U ein normaler Ultrafilter über κ, $R \subseteq V_\kappa$ und $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ für $\varphi \in \Pi^2_1$, dann:*

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi\} \in U$$

Proof. Sei also $j : V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$. Dann gilt also $V_{\kappa+1} \subseteq M$ und somit sind zweitstufige Aussagen über V_κ absolut zwischen V und M. Die einzigen Typ 3 Quantoren in φ sind aber universell, bleiben also abwärts erhalten, und damit gilt $(\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi)^M$. Nachdem $j(R) \cap V_\kappa = R$ folgt die Behauptung aus der Normalität von U (Satz von Los). □

Es gibt eine Σ^2_1-Formel, die über V_κ die Messbarkeit von κ besagt. Die kleinste messbare Kardinalzahl ist also nicht Σ^2_1-unbeschreibbar, womit der obige Satz das stärkste mögliche Ergebnis dieser Art darstellt.

Satz 5. *Sei κ messbar und U ein normaler Ultrafilter über κ. Dann $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ ist total unbeschreibbar$\} \in U$.*

Proof. Sei wieder $j : V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$. Es reicht zu zeigen, dass $M \models$„κ ist total unbeschreibbar“, die Behauptung folgt dann aus der Normalität von U. Sei

$$M \models (R \subseteq V_\kappa \wedge \langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi).$$

Dann ist also κ ein Zeuge für

$$M \models \exists \alpha < j(\kappa)(\langle V_\alpha, \in, j(R) \cap V_\alpha\rangle \models \varphi),$$

weil $j(R) \cap V_\kappa = R$. Wegen Elementarheit der Einbettung gilt also

$$\exists \alpha < \kappa(\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi),$$

und nachdem $V^M_\kappa = V_\kappa$ gilt diese Formel also auch in M. □

Lustigerweise ist Unbeschreibbarkeit kompatibel mit $V = L$ (Beweis basiert auf spezifischen Eigenschaften von L, also nicht auf allgemeine innere Modelle verallgemeinbar):

Satz 6. *Sei Q entweder Π^m_n oder Σ^m_n für $m > 1$ oder $m = 1, n > 0$ und sei κ Q-unbeschreibbar, dann (κ ist Q-unbeschreibbar)^L. Insbesondere: Ist κ schwach kompakt, dann (κ ist schwach kompakt)^L.*

Beweis aufwendig 0o (Seite 62)

Proof. Sei im folgenden λ^+ Der Nachfolger von λ *in L(!)* und analog $\lambda^{+(i)}$ der i-te Nachfolger.

- Sei $0 < i < \omega, s > 0$ und λ unerreichbar. Für jede Π^r_s-Formel (entsprechend Σ^r_s) $\varphi(X_1, ..., X_t)$ gibt es eine Σ^{r+i}_s-Formel (entsprechend Π^{r+i}_s) $\tilde{\varphi}(Y_1, ..., Y_t)$ mit $\mathrm{Typ}(Y_k) = \mathrm{Typ}(X_k) + i$ für $1 \le k \le t$ und für jedes $A \in \mathcal{P}^j(L_{\lambda^{+(i)}})$ für $j \in \omega$ ein $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{j+i}(V_\lambda) = V_{\lambda+j+i}$, so dass

  $$L_{\lambda^{+(i)}} \models \varphi(A_1, ..., A_t) \quad \Leftrightarrow \quad V_\lambda \models \tilde{\varphi}(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_t)$$

  (Induktion über i)

- Ist λ unerreichbar, dass ist λ unerreichbar in L und somit $(V_\lambda)^L = L_\lambda$ (Induktion über Rang und es gibt einen Π^1_1-Satz τ, der die Unerreichbarkeit von λ in V_λ ausdrückt).

- Der Fall für Σ^1_1 folgt aus Satz 2b). Sei also κ unbeschreibbar für Π^m_n (Der allgemeine Σ^m_n-Fall funktioniert analog). Wegen Unerreichbarkeit gilt also $(V_\kappa)^L = L_\kappa$. Sei also

  $$R \in \mathcal{P}(L_\kappa) \cap L \qquad (\langle L_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi_0)^L$$

  für $\varphi_0 \in \Pi^m_n$. Es gilt $\mathcal{P}(L_\kappa) \cap L \subseteq L_{\kappa^+}$ und induktiv $\mathcal{P}^i(L_\kappa) \cap L \subseteq L_{\kappa^{+(i)}}$ für jedes $i \in \omega$. Die Annahme ist also äquivalent zu

  $$\langle L_{\kappa^{+(m)}}, \in, R\rangle \models \varphi_1$$

  Für einen entsprechenden Π^0_n-Satz φ_1. Nach Punkt 1 gibt es einen korrespondierenden Π^m_n-Satz $\tilde{\varphi_1}$, so dass $\langle V_\kappa, \in, \tilde{R}\rangle \models \tilde{\varphi_1}$. Nach unerreichbarkeit gibt es also ein $\alpha < \kappa$ mit den üblichen Eigenschaften und durch zurückreflektieren von $\tilde{\varphi_1} \wedge \tau$ erhalten wir

  $$(\langle L_\alpha, \in, R \cap L_\alpha\rangle \models \varphi_0)^L.$$

□

Lässt sich Q-unbeschreibbarkeit in V_κ ausdrücken?

Satz 7.

Für alle $m, n > 0$ gibt es eine Π^m_n-Formel $\psi_{m,n}(X, Y)$ mit X vom typ 2 und Y vom typ 1, so dass für jede Π^m_n-Formel $\varphi(X)$ ein $k \in \omega$ existiert, so dass für jede Limeszahl α und $R \subseteq V_\alpha$:

$$\langle V_\alpha, \in\rangle \models \varphi(R) \quad \Leftrightarrow \quad \langle V_\alpha, \in\rangle \models \psi_{m,n}(R, k)$$

Analog für Σ^m_n.

Beweis folgt aus Gödelisierung.

Korollar 1. *a) Für jedes n gibt es einen Π^1_{n+1} Satz $\chi_{1,n}$ so dass für alle κ:*

$$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \chi_{1,n} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \text{ ist } \Pi^1_n\text{-unbeschreibbar}$$

Wegen Satz 2 deckt das auch den Σ^1_n-Fall ab.

b) Sei $m > 1$. Für jedes $n > 0$ gibt es einen Π^m_n-Satz $\chi_{m,n}$ so dass für alle κ

$$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \chi_{m,n} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \text{ ist } \Sigma^m_n\text{-unbeschreibbar}$$

Analog lässt sich Π^m_n-unbeschreibbarkeit durch einen Σ^m_n-Satz ausdrücken.

Proof. a) Für $n = 0$ sei $\chi_{1,0}$ irgendeine Π^1_1-Beschreibung von Unerreichbarkeit.
Für $n > 0$ sei $\psi_{1,n}$ wie oben und definiere:

$$\chi_{1,n} = \forall X \forall Y (\psi_{1,n}(X, Y) \to \exists \alpha > 0\ (\alpha \text{ ist Limes} \wedge \langle V_\alpha, \in\rangle \models \psi_{1,n}(X \cap V_\alpha, Y)))$$

$\psi_{1,n}$ ist Π^1_n, durch das $\forall X$ haben wir damit einen Π^1_{n+1}-Satz.

b) Funktioniert genauso, Π^m_n ergibt sich daraus, dass das $\forall X$ beim pränexen beschränkt werden kann. □

Sei nun π^m_n (bzw. σ^m_n) die kleinste Π^m_n-unbeschreibbare Kardinalzahl (bzw. Σ^m_n), so ergibt sich:

- σ^1_1 ist die kleinste unerreichbare Kardinalzahl
- $\pi^1_1 = \sigma^1_2 < \pi^1_2 = \sigma^1_3 < ...$
- Für $m > 1, n > 0$ gilt $\sigma^m_n \neq \pi^m_n$ und $\pi^m_n < \sigma^m_{n+1}, \pi^m_{n+1}$

Satz 8. *Für $m > 1, n > 0$ und $V = L$ gilt: $\sigma^m_n < \pi^m_n$*

Aber:

Satz 9. *Für $m > 1, n > 0$: Gibt es eine Σ^m_n-unbeschreibbare Kardinalzahl und eine kleinere Π^m_n-unbeschreibbare Kardinalzahl, so gibt es eine generische Erweiterung mit solchen Kardinalzahlen, in der $\sigma^m_n > \pi^m_n$.*

Definition 2.

- Q wie bisher, X heißt Q-unbeschreibbar in κ, wenn für jedes $R \subseteq V_\kappa$ und jeden Q-Satz φ mit $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ ein $\alpha \in X$ existiert, so dass $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$.
- $I_{Q,\kappa} := \{X \subseteq \kappa \mid X \text{ ist nicht } Q\text{-unbeschreibbar in } \kappa\}$
- $F_{Q,\kappa} := \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \setminus X \text{ ist nicht } Q\text{-unbeschreibbar in } \kappa\}$

Satz 10. *a) κ ist Q-unbeschreibbar gdw F ein echter Filter ist, der alle Endsegmente $\{\xi \mid \alpha \leq \xi < \kappa\}$ enthält (der Q-unbeschreibbare Filter über κ).*

b) für $m, n > 0, Q = \Pi^m_n$ oder $= \Sigma^m_n$ ist $F_{Q,\kappa}$ ein normaler Filter.

Proof. a) κ ist Q-unbeschreibbar gdw κ auch Q-unbeschreibbar in κ ist, also genau dann, wenn $\emptyset \notin F_{Q,\kappa}$.
$\emptyset$ ist trivialerweise nicht Q-unbeschreibbar in κ, also $\kappa \setminus \emptyset = \kappa \in F_{Q,\kappa}$.
Seien $\alpha \in F_{Q,\kappa}$, $\beta \supset \alpha$, dann ist $\kappa \setminus \alpha$ nicht Q-unbeschreibbar in κ und $\kappa \setminus \beta \subset \kappa \setminus \alpha$ entsprechend auch nicht.
Seien $\alpha, \beta \in F_{Q,\kappa}$, dann ist $\kappa \setminus (\alpha \cap \beta) = (\kappa \setminus \alpha) \cup (\kappa \setminus \beta)$. Es gibt also $R, S \subseteq V_\kappa$ und Q-Sätze φ, ψ so dass

$$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi \qquad \langle V_\kappa, \in, S\rangle \models \psi$$

also erhalten wir mit $T = (R \times \{0\}) \cup (S \times \{1\})$ äquivalente Sätze φ', ψ' so dass

$$\langle V_\kappa, \in, T\rangle \models \varphi' \wedge \psi'$$

Kein $\gamma \in \kappa \setminus \alpha$ erfüllt φ und kein $\gamma \in \kappa \setminus \beta$ erfüllt ψ, also erfüllt kein $\gamma \in (\kappa \setminus \alpha) \cup (\kappa \setminus \beta)$ den Satz $\varphi' \wedge \psi'$, also $\alpha \cap \beta \in F$.
Sei $\{\xi \mid \xi < \alpha\}$ ein echtes Anfangsstück. Dann gilt mit $R = \{\alpha\} : \langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \exists x R(x)$, also nicht Q-unbeschreibbar in κ.

b) Sei $Q = \Pi^m_n$ (der Σ-Fall geht wieder analog). Angenommen $X \subseteq \kappa$ mit $f : X \to \kappa$ regressiv (i.e. $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in X \setminus \{0\}$) und $f^{-1}(\{\alpha\})$ ist *nicht* Π^m_n-unbeschreibbar in κ für irgendein $\alpha \in X$. Es reicht zu zeigen, dass X nicht Π^m_n-unbeschreibbar in κ ist. Benutze die universelle Formel $\psi_{m,n}$ aus Satz 7, dann können wir annehmen, dass für jedes $\alpha < \kappa$ ein $R_\alpha \subseteq V_\kappa$ und $k_\alpha \in \omega$ existieren, so dass $\langle V_\kappa, \in\rangle \models \psi_{m,n}(R_\alpha, k_\alpha)$, aber $\langle V_\xi, \in\rangle \models \neg\psi_{m,n}(R_\alpha \cap V_\xi, k_\alpha)$ für jedes $\xi \in X$ mit $f(\xi) = \alpha$. Setze:

$$R = \{\langle \alpha, \beta\rangle \mid \alpha < \kappa \wedge \beta \in R_\alpha\} \qquad T = \{\langle \alpha, k_\alpha\rangle \mid \alpha < \kappa\}$$

Sei τ irgendein erstufiger Satz, der in V_δ ausdrückt, dass δ eine Limeszahl> 0 ist. Dann gilt:

$$\langle V_\kappa, \in, R, T\rangle \models \tau \wedge \forall \alpha \forall U \forall v (U = R''[\{\alpha\}] \wedge v = T(\alpha) \to \psi_{m,n}(U, v))$$

Dieser Satz ist Π^m_n und wegen τ muss jedes ξ auf das dieser Satz reflektiert wird folgendes erfüllen:

$$R \cap V_\xi = \left\{\langle \alpha, \beta\rangle \mid \alpha < \xi \wedge \beta \in R_\alpha \cap V_\xi\right\} \qquad T \cap V_\xi = T \mid \xi$$

Nachdem f regressiv ist muss also $f(\xi) = \alpha < \xi$ gelten, also $\xi \notin X$, also ist X nicht Π^m_n-unbeschreibbar in κ. □