# 1 Vorlesungsmitschrift Topologie

Aktueller Stand: 25. Juli 2012
Ernst Kuwert: 208, Tel.:208 (5585)
Roberta Alessandroni: 206
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/TopologieSS12.html

## Einleitung

Begriff der Stetigkeit, metrische Räume $(X, d)$
Literatur: Armstrong "Basic Topology", Schubert, etc.
Ziele:

1. Allgemeine Definition von Objekten ("Topologische Räume") in denen der Begriff der stetigen Funktionen wohldefiniert ist.
   Unter welchen Bedingungen gelten welche topologischen Eigenschaften analog zum $\mathbb{R}^n$ (Mengentheoretische Topologie)
   Boto v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie

2. Klassifikation von geometrischen Objekten, z.B. zweidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$, bis auf *Homöomorphie* (eine in beide Richtungen stetige Bijektion)
   Zentraler Ansatz zur Unterscheidung von Objekten: *Topologische Invarianten* (z.B. ganze Zahlen, Gruppen...$\to$ algebraische Objekte, "Lochzahl" von Flächen)
   "Algebraische Topologie"
   Ist ein geometrisches Objekt bis auf Homöomorphie durch gewisse Invarianten vollständig charakterisiert? (kann schwierig sein, erfodert Methoden der Analysis).
   Beispiele: Riemannsche Abbildungssatz, Poincarévermutung

# 1 Topologische Räume

**Definition 1.1** Sei $X$ eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset 2^X$ heißt *Topologie auf $X$*, wenn gilt:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

3. $(U_i) \subset \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennen wir *offene Mengen* (Die Offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ bilden eine Topologie)
Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt *Topologischer Raum*

**Beispiel 1.1** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $B_\rho(x) = \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$
Sei $\mathcal{T} \subset 2^X$ das System aller $U \subset X$ mit der Eigenschaft: $\forall x \in U \exists p > 0 : B_\rho(x) \in U$.
Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$, die durch die Metrik $d$ induzierte Topologie.

*Beweis:* $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$✓
$U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall x \in U_1 \cap U_2 \exists \rho_1, \rho_2 : B_{\rho_1}(x) \subset U_1, B_{\rho_2}(x) \subset U_2$
Wähle $\rho := \min\{\rho_1, \rho_2\} \Rightarrow B_\rho(x) \subset U_1 \cap U_2$✓
$x \in \bigcup_{i \in U} U_i$, $U_i$ offen $\Rightarrow B_{\rho_i}(x) \subset U_i \Rightarrow B_{\rho_i}(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$✓

□

**Beispiel 1.2** Auf jeder Menge $X$ hat man folgende Topologien:

- *Diskrete Topologie:* $\mathcal{T} = 2^X$
- *triviale/indiskrete Topologie:* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

**Definition 1.2** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$

**Bemerkung:** $\emptyset, X$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen
$A_1, A_2$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen
$A_i$ abgeschlossen, $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

**Satz 1.1** Sei $X$ topologischer Raum[1]. Für $M \subset X$ sind äquivalent:

1. $M$ ist offen
2. $\forall x \in M \exists V$ offen, mit $x \in V \subset M$

*Beweis:* 1→2: Wähle $V = M$✓
2→1: Für $x \in M$ gibt es nach Vorr. $V_x$ offen mit $x \in V_x \subset M$
$M = \bigcup_{x \in M} V_x$ offen ✓

□

[1] $\mathcal{T}$ wird oft nicht erwähnt

**Definition 1.3(Inneres, Abschluss, Rand)** Sei $X$ topologischer Raum, $M \subset X$

1. $x \in X$ heißt Berührpunkt von $M$, wenn gilt: $M \cap V \neq \emptyset \forall V \in \mathcal{T}, x \in V$
   Die Menge der Berührpunkte heißt *Abschluss* $\overline{M}$ von M
2. $x \in X$ heißt innerer Punkt von $M$, falls $\exists V \in \mathcal{T}, x \in V \subset M$.
   Die Menge aller inneren Punkte heißt *Inneres* $\text{int}M$
3. $\partial M := \overline{M} \backslash \text{int}M$ heißt *Rand* von $M$, Elemente heißen *Randpunkte*

Beispiel: $\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
Allgemein: $\text{int}M \subset M \subset \overline{M}$

**Lemma 1.1** Es gelten folgende Aussagen:

1. $\overline{X \setminus X} = X \backslash \text{int}M$
2. $\text{int}(X \setminus M) = X \setminus \overline{M}$
3. $\text{int}U = U \forall U \in \mathcal{T}$, $\overline{A} = A \forall A$ abgeschlossen
4. $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$

   *Beweis:*

   1. $x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow (X \setminus M) \cap V \neq 0 \forall \mathcal{T} \supset V \ni x$
      $\Leftrightarrow V$ nicht Teilmenge von $M \forall \mathcal{T} \supset V \ni x$
      $\Leftrightarrow x \notin \text{int}M \Leftrightarrow x \in X \backslash \text{int}M \checkmark$
   2. $x \in \text{int}(X \setminus M) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset X \setminus M$
      $\Leftrightarrow x \notin \overline{M} \Leftrightarrow x \in X \setminus \overline{M} \checkmark$
   3. $\text{int}U = U$ trivial (wähle $V = U$ in Def. 1.3(2))
      $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A) = X \setminus A$ (weil offen)
      $\Rightarrow \overline{A} = A \checkmark$
   4. $\overline{X \setminus M} = X \backslash \text{int}M$
      $\Rightarrow \overline{M} \cap (\overline{X \setminus M}) = \overline{M} \cap (X \backslash \text{int}M) = \overline{M} \backslash \text{int}M = \partial M \checkmark$

□

**Satz 1.2** Sei $X$ topologischer Raum, $M \subset X$. Dann gilt:

1. $\text{int}M$ ist offen und es gilt: $U$ offen, $U \subset M \Rightarrow U \subset \text{int}M$
   ($\text{int}M$ ist die *größte offene Teilmenge* von $M$, $\text{int}M = \bigcup_{U \text{ offen}, U \subset M} U$)
2. $\overline{M}$ ist abgeschlossen und es gilt: $A$ abgeschlossen, $M \subset A \Rightarrow \overline{M} \subset A$
   ($\overline{M}$ ist die *kleinste abgeschlossene Obermenge* von $M$, $\overline{M} = \bigcap_{A \text{ abgeschlossen}, A \supset M} A$)

3. $\partial M$ ist abgeschlossen

   *Beweis:*

   1. Wir benutzen die Charakterisierung aus Satz 1.1:
      Sei $x \in \mathrm{int} M \Rightarrow V$ offen: $x \in V \subset M$
      $\forall y \in V : y \in V \subset M, V$ offen
      $\Rightarrow y \in \mathrm{int} M$ bzw. $V \subset \mathrm{int} M$
      $\Rightarrow \mathrm{int} M$ offen nach Satz 1.1
      Sei nun $U$ offen, $U \subset M$. Für $x \in U$ folgt $x \in U \subset M$, also $x \in \mathrm{int} M$ nach Def.
      $\Rightarrow U \subset \mathrm{int} M$

   2. Es gilt: $X \setminus \overline{M} = \mathrm{int}(X \setminus M)$ (Lemma 1.1(2)) ist offen, also $\overline{M}$ abgeschlossen.
      Sei $A$ abgeschlossen, $M \subset A \Rightarrow X \setminus A \subset X \setminus M$
      Nach (1) $\Rightarrow X \setminus A \subset \mathrm{int}(X \setminus M) = X \setminus \overline{M} \Rightarrow \overline{M} \subset A$

   3. $\partial M = \overline{M} \setminus \mathrm{int} M = \overline{M} \cap (X \setminus \mathrm{int} M)$ ist abgeschlossen (nach Bemerkung Def.1.2.)

   □

System von offenen Mengen kann groß sein. Frage nach Teilsystemen:

**Definition 1.4** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

1. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen heißt *Basis* der Topologie, wenn jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
2. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen heißt *Umgebungsbasis* von $x \in X$, wenn
   - $x \in V \forall V \in \mathcal{B}$
   - $\forall U$ offen, $x \in U \exists V \in \mathcal{B} : x \in V \subset U$

**Bemerkung:** Man nennt eine beliebige Menge $M \subset X$ *Umgebung* von $x \in X$, wenn $\exists U$ offen mit $x \in U \subset M$

**Beispiel 1.3** In einem metrischen Raum $(X, d)$ ist $\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{1}{k}}(x), k \in \mathbb{N} \right\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x \in X$

**Beispiel 1.4** In $\mathbb{R}^n$ bilden die Kugeln $\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{1}{k}}(q), q \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N} \right\}$ eine abzählbare Basis der Topologie. Denn sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$. Dann gibt es $k_x \in \mathbb{N}$ mit

$\overline{B_{\frac{1}{k}}(x)} \subset U$. Für $q_x \in \mathbb{Q}^n$ mit $q_x$ hinreichend nahe an $x$ folgt dann auch $B_{\frac{1}{k_x}}(q_x) \subset U$
$\Rightarrow U = \bigcup_{x\in U} B_{\frac{1}{k_x}}(q_x)$

**Allgemeiner** Gibt es in einem metrischen Raum $(X, d)$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so gibt es auch eine abzählbare Umgebungsbasis

**Definition 1.5** $M \subset X$ heißt *dicht in* $X$, falls $\overline{M} = X$

**Definition 1.6(Abzählbarkeitseigenschaften)** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum

1. $X$ heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge $M \subset X$ gibt
2. $X$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn $\forall x \in X \exists$ abzählbare Umgebungsbasis
3. $X$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat.

**Bemerkung** 2. Abzählbarkeitsaxiom$\Rightarrow$1. Abzählbarkeitsaxiom, Separabilität

*Beweis:* Sei $U_i, i \in \mathbb{N}$ abzählbare Basis der Topologie
Wähle $x_i \in U_i$. $\forall i \in \mathbb{N}$, setze $M = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
Angenommen nicht dicht: $X \setminus \overline{M} \neq \emptyset$ offen
$\exists i \in \mathbb{N} : U_i \subset X \setminus \overline{M} \Rightarrow x_i \in X \setminus \overline{M}$ widerspruch.
Sei $x \in X$. Setze $\mathcal{B}_x = \{U_i \mid x \in U_i\}$
Nach Vorraussetzung $U = \dot{\bigcup}_{U_i \subset U} U_i \forall U$ offen.
Ist $x \in U$, so gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_i \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ Umgebungsbasis von $x$

$\square$

**Satz 1.3** Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{B} \subset 2^X$ ein nichtleeres System von Teilmengen mit

1. $V_1, V_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$
2. $\bigcup_{V\in\mathcal{B}} V = X$

Dann gibt es genau eine Topologie auf $X$, so dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

*Eindeutigkeit:* Es muss gelten $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} V_i$

↯ Übungsaufgabe

# 2 Stetige Abbildungen, Konstruktion von topologischen Räumen

**Definition 2.1** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V)$ offen für alle offenen $V \subset Y$

**Beispiel 2.1** Seien $(X,d),(Y,d)$ metrische Räume. Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

1. $f^{-1}(V)$ offen für alle $V \subset Y$ offen
2. Zu jedem $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$

   *Beweis:*1 $\Rightarrow$ 2: Sei $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ und $y_0 = f(x_0)$
   $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ offen, $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$
   $\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$
   $\Rightarrow f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(y_0)$
   2 $\Rightarrow$ 1: Wir wollen Satz 1.1 benutzen
   Sei $V \subset Y$ offen. Zu $x \in f^{-1}(V)$ wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ (offen)
   Es gibt $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$
   $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ offen nach Satz 1.1

   □

**Satz 2.1(Charakterisierungen der Stetigkeit)** Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

1. $f$ stetig
2. $f^{-1}(V)$ offen $\forall V$ in der Basis der Topologie von Y
3. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle $A \subset X$
4. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ für alle $B \subset Y$
5. $f^{-1}(C)$ abgeschlossen für alle $C \subset Y$ abgeschlossen

*Beweis:*

$1 \Rightarrow 2$ :trivial (betrachte Basismengen offen nach Def.)

$2 \Rightarrow 3$ :Sei $x \in \overline{A}$ und $V \subset Y$ offen mit $f(x) \in V$.

$\mathbb{Z}$: $f(A) \cap V \neq \emptyset$

Wir können oBdA $V \in \mathcal{B}$ annehmen

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ offen und $x \in f^{-1}(V)$

$x \in \overline{A} \Rightarrow A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ (def. Abschluss)

$\Rightarrow f(A) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$

$3 \Rightarrow 4$ :Verwende 3 mit $A = f^{-1}(B)$

$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$

$4 \Rightarrow 5$ :Für $C$ abgeschlossen ist $\overline{C} = C$, also

$\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$ bzw. $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$

$5 \Rightarrow 1$ :$f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V), (Y \setminus V)$ ist abgeschlossen

$\Rightarrow$ offen

□

**Satz 2.2(Komposition stetiger Abbildungen)** Seien $X, Y, Z$ topologische Räume und $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ stetig
$\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ stetig

*Beweis:*Sei $W \subset Z$ offen, dann $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ offen.

□

**Definition 2.2** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $A \subset X$, dann heißt $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ die *Teilraum-Topologie* oder *Relativtopologie* auf $A$

$\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{T}_A$
$A = X \cap A \in \mathcal{T}_A$
Seien $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_A$, also $V_i = U_i \cap A$ mit $U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap A \in \mathcal{T}_A$
Seien $V_i \in \mathcal{T}_A$ für $i \in I$, also $V_i = U_i \cap A$ für $U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} V_i = \left(\bigcup\limits_{i \in I}\right) \cap A \in \mathcal{T}_A$

**Bemerkung** Sei $f : X \to A \subset Y$, dann gilt für $U \subset Y$ offen, $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap A)$:
$f : X \to (Y, \mathcal{T})$ stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ offen $\forall U \subset Y$ offen
$f : X \to (A, \mathcal{T}_A)$ stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(U \cap A)$ offen $\forall U \subset Y$ offen

**Beispiel 2.2** Betrachte $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit euklidischem Abstand, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
$f : [0, 2\pi) \to S^1, f(t) = e^{it}$
$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ stetig (sogar Lipschitz) $\Rightarrow f : [0, 2\pi) \to S^1$ stetig (Bemerkung) bzgl. der Teilraum-Topologie auf $S^1$
$f$ bijektiv, aber $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ nicht stetig
$[0, \pi)$ ist offen in $[0, 2\pi)$ (weil $[0, \pi) = (-\infty, \pi) \cap [0, 2\pi)$ )
aber $(f^{-1})^{-1}([0, \pi)) = f([0, \pi)) = \left\{e^{it} \mid 0 \le t < \pi\right\} = C$ ist nicht offen in $S^1$
Wäre $C$ offen in $S^1 \Rightarrow \exists U \subset C$ offen mit $C = U \cap S_1$, insbesondere $1 \in U$, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(1) \subset U \Rightarrow B_\varepsilon(1) \cap S^1 \subset C \Rightarrow$ Widerspruch

**Definition 2.3** Eine Bijektion $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls offen und $f$ und $f^{-1}$ beide stetig sind
$f$ heißt *offen*, wenn $f(U)$ offen $\forall U \subset X$ offen

**Begriffsbildung** Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf $X$, dann heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_2$ *gröber* als $\mathcal{T}_1$) wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$

**Satz 2.3** Sei $X$ topologischer Raum und $A \subset X$

1. Die Teilraum-Topologie ist die größte Topologie auf $A$, so dass die Inklusion $i_A : A \to X$ stetig ist
2. Ist $f : X \to Y$ stetig so ist $f\,|_A : A \to Y$ stetig bzgl. der Teilraum-Topologie auf $A$

*Beweis:*

1. Sei $V \subset X$ offen. Es gilt: $i_A^{-1}(V) = V \cap A$.
   - $i_A$ ist stetig bzgl der Teilraum-Topologie, denn $V \cap A \in \mathcal{T}_A$
   - Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $A$, so dass $i_A$ stetig ist, dann $V \cap A \in \mathcal{T}$, also $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}_A$
2. Sei $V \subset Y$ offen: $(f\,|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{T}_A \Rightarrow f\,|_A$ stetig

□

**Bemerkung** Aus $f\,|_A$ stetig folgt nicht $f$ stetig auf A
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}, A = \{0\}$
$f\,|_A$ trivial stetig, aber $f$ nicht stetig in $A$

**Satz 2.4** Sei $X$ topologischer Raum und $X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ mit $A_i$ abgeschlossen, dann ist $f : X \to Y$ stetig gdw $f\mid_{A_i}$ stetig ist $\forall i = 1, ..., k$

*Beweis:*
$\Rightarrow$ siehe oben
$\Leftarrow$ Sei $B \subset Y$ abgeschlossen, dann gilt: $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{k} (f\mid_{A_i})^{-1}(B)$ (mit $A_i = \bigcup_{i=1}^{k} C_i \cap A_i$ abgeschlossen)
Eine Menge $M \subset A_i$ ist abgeschlossen bzgl der Teilraum-Topologie, wenn es $C_i \subset X$ abgeschlossen gibt mit $M = C_i \cap A_i$ (Folgt durch Übergang zu Komplementen aus der Definition von Teilraum-Topologie)

□

**Definition 2.4(Produkttopologie)** Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$ eine Familie topologischer Räume,
$X = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i\in I} X_i$

$$U = \prod_{i\in I} U_i : \begin{cases} U_i \text{ offen in } X_i \\ U_i = X_i \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I \end{cases}$$

Diese Mengen $U$ bilden die Basis der *Produkttopologie*
$X$ heißt *topologisches Produkt* der $X_i$

**Beispiel 2.3** $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$
Basismengen sind von der Form $U_1 \times ... \times U_n$ mit $U_i$ offen. Umgekehrt: Basismengen aus der euklidischen Topologie sind Bälle $B_r(x)$, $B_r(x)$ offen bzgl Produkttopologie $\Rightarrow$ Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist die Produkttopologie

**Satz 2.5** Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ mit Produkttopologie

1. Die Projektionsabbildungen $\pi_j : X \to X_j$ sind stetig und offen
2. Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie bzgl der alle $\pi_j$ stetig sind

*Beweis:*

1. Sei $V \subset X_j$ offen.
   $\pi_j^{-1}(X) = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_j \in V, x_i \in X_i \text{ sonst}\}$ ist Basismenge, also offen.
   Ist $\Omega \subset X$ offen, so ist $\Omega$ Vereinigung von Basismengen $\Rightarrow \pi_j(\Omega)$ ist Vereinigung der Komponentenmengen, also offen in $X_j \Rightarrow \pi_j$ ist offen

2. Sei $\mathcal{T}$ Topologie auf $X = \prod_{i\in I} X_i$, so dass alle $\pi_j$ stetig sind.

$\Rightarrow \pi_j^{-1}(X) = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_j \in V_j, x_i \in X_i \text{ sonst}\}$ offen
Da Basismengen endliche Durchschnitte solcher Mengen sind, sind alle Basismengen in $\mathcal{T}$
$\Rightarrow \mathcal{T}$ enthält Produkttopologie

□

**Beispiel 2.4**

- $X \times [0,1], X$ topologischer Raum (Zylinder über $X$)
- $S^1 \times S^1$ Torus

**Bemerkung** Die Basis einer Topologie ist in der Topologie enthalten (well, duh...)

**Definition 2.5(Quotiententopologie)** Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf topologischem Raum $X$ und $p : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion.
$V \subset X/\sim$ ist offen $\Leftrightarrow p^{-1}(V) \subset X$ offen.

**Satz 2.6** Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ bzgl. der die Projektion stetig ist.

*Beweis:*

- Eigenschaften der Topologie:
  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ offen in $X$
  $p^{-1}(X/\sim) = X$ offen
  $V_1 \cap V_2$ offen $\Rightarrow p^{-1}(V_1 \cap V_2) = p^{-1}(V_1) \cap p^{-1}(V_2)$ offen
  $V_i$ offen $\Rightarrow p^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(V_i)$ offen
  $p$ stetig nach definition.
- Sei $\mathcal{T}$ Topologie auf $X/\sim$, so dass $p$ stetig ist.
  Für $U \in \mathcal{T}$ folgt $p^{-1}(U)$ offen in $X$, also $U$ offen bzgl Quotiententopologie

□

**Bemerkung** $f$ stetig $\Leftrightarrow f \circ p$ stetig, denn für $V \subset Y$: $f^{-1}(V)$ offen $\leftrightarrow p^{-1}(f^{-1}(V))$ offen in $X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "f\circ p"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

**Beispiel 2.5** Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$
Wir zeigen: $\mathbb{R}/\sim$ ist homöomorph zu $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p"'] & & S^1 \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}(t) = e^{it}$ stetig

$f$ bijektiv, stetig (Bemerkung)
Zz $f^{-1}$ stetig, dazu zeigen wir: $C \subset \mathbb{R}/\sim$ abgeschlossen $\Rightarrow f(C)$ abgeschlossen
Ist $U \subset \mathbb{R}\sim$ offen, so folgt mit $C = (\mathbb{R}/\sim) \setminus U$: $f(U) = f((\mathbb{R}/\sim) \setminus C) = \underbrace{f(\mathbb{R}/\sim)}_{=S^1} \setminus f(C)$ offen.
Die Menge $p^{-1}(C)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R} \Rightarrow p^{-1}(C) \cap [0, 2\pi]$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(C) = \tilde{f}(p^{-1}(C) \cap [0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^2$ kompakt.
$x \in p^{-1}(C) \Rightarrow p(x) \in C$
$\tilde{f}(x) = f(p(x)) \in f(C) \Rightarrow f(C)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, also abgeschlossen in $S^1$

**Beispiel 2.6** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, Betrachte auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation
$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ mit $y = \lambda x$
Der Quotient $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim =: \mathbb{K}P^n$ heißt $n$-dimensionaler projektiver Raum über $\mathbb{K}$.
Elemente sind die eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ (Geraden).

$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\subset \text{ stetig}"] \arrow[d, "\text{stetig } \pi"'] \arrow[dr, "\text{stetig}"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p \text{ stetig}"] \\ S^n/\{\pm 1\} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

$f$ bijektiv, stetig nach Bemerkung

$f$ homöomorph?
Sei $U \subset S^n/\pm 1$ offen, also $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ offen in $S^n$
Es gilt: $f(U) = (f \circ \pi)(\tilde{U}) = p(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}P^n$
$p^{-1}(p(\tilde{U})) = \left\{\lambda x, x \in \tilde{U}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$ (Kegel über $\tilde{U}$)
Es reicht zu zeigen: $\tilde{U}$ offen $\Rightarrow$ Kegel über $\tilde{U}$ ist offen.
Sei $y = \lambda x$ mit $x \in \tilde{U}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap S^n \subset \tilde{U}$ ($\tilde{U}$ ist offen in $S^n$).
Für $|z - y| < \rho$:

$$\left| \underbrace{\frac{|y|}{|z|} \frac{z}{\lambda}}_{\in S^n} - x \right| \leq \frac{1}{|x|} \left| \frac{|y|}{|z|} z - y \right| \leq \frac{1}{|x|} \left( |z - y| + \left| \frac{|y|}{|z|} z - z \right| \right) = \frac{1}{|x|} (|z - y| + ||y| - |z||)$$

$$\leq \frac{z}{|x|} |z - y| \leq \varepsilon \text{ für } \rho = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon$$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{|y|}{|z|}\frac{z}{\lambda}}_{=:\xi} \in \tilde{U}$ für $|z-y| < \rho$

$\Rightarrow z = \frac{\lambda|z|}{|y|}\xi \in$ Kegel über $\tilde{U}$, also ist der Kegel offen.
Analog für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $S^1$ operiert auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p"] \\
S^{2n+1}/\left\{S^1\right\} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}$$

$z, w \in S^{2n+1}$, $z \sim w \Leftrightarrow w = \lambda z$ mit $\lambda \in S^1 \Leftrightarrow w = e^{i\varphi}z$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}P^n$ homöomorph zu $S^n$?

# 3 Zusammenhang

**Definition 3.1** Ein topologischer Raum $X$ heißt *zusammenhängend* gdw gilt:
$M \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen $\Rightarrow M = X$
Äquivalent: $X = U \cup V$ mit $U, V$ offen und disjunkt $\Rightarrow U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$

**Satz 3.1** $X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn folgende Implikation gilt:
$f : X \to Y$ stetig bzgl. diskrete Topologie auf $Y \Rightarrow f$ ist konstant

*Beweis:*$\Rightarrow$: Sei $f : X \to Y$ stetig bzgl diskreter Topologie auf $Y$
Sei $y_0 = f(x_0)$ für $x_0 \in X$. Da $\{y_0\}$ offen ist $f^{-1}(\{y_0\})$ offen, nicht leer und abgeschlossen:
$X \setminus f^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus \{y_0\}}_{\text{offen}})$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(\{y_0\}) = X$
$\Leftarrow$: Sei $M \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen in $X$
Definiere $f : X \to \{0,1\}$ durch $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$f^{-1}(\{1\}) = M$ offen, $f^{-1}(\{0\}) = X \setminus M$ offen $\Rightarrow f$ stetig bzgl diskreter Topologie auf $\{0,1\}$
$\Rightarrow$ nach Vorraussetzung $f$ ist konstant, da $M \neq \emptyset$ folgt $M = X$

□

**Satz 3.2** Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

**Bemerkung** Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn mit $a = \inf M$ und $b = \sup M$ gilt: $a < c < b \Rightarrow c \in M$

*Beweis Satz 3.2:*$\Rightarrow$: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, $a = \inf M$, $b = \sup M$
Angenommen $\exists a < c < b$ mit $c \notin M$. Betrachte: $M \cap (-\infty, c)$ ist nicht leer, offen in $M$ (Teilraumtopologie)
aber da $c \notin M$: $M \cap (-\infty, c) = M \cap (-\infty, c]$ abgeschlossen
aber $M$ zusammenhängend $\Rightarrow M \cap (-\infty, c) = M$, Widerspruch zu $c < b$
$\Leftarrow$: Sei $I$ Intervall mit Grenzen $a \leq b$ (oBdA $a < b$)
Sei $M \subset I$ nicht leer, offen und abgeschlossen in $I$. $\mathbb{Z}$ $M = I$
Setze $\beta = \sup M \in (a, b]$. Es gilt $\beta \notin I$, denn sonst $(\beta - \varepsilon, \beta] \subset I \setminus M$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.
$I \setminus M$ offen in $I \Rightarrow U \subset \mathbb{R}$ offen, $I \setminus M = U \cap I \Rightarrow I \cap (\beta - \delta, \beta + \delta) \subset I \setminus M$.
Angenommen $\beta < b$, dann $\beta \in M$ (sonst $\beta \in I \setminus M \Rightarrow$ Widerspruch)
$M$ offen in $I \Rightarrow [\beta, \beta + \varepsilon) \subset M$ für $\varepsilon > 0$ geeignet $\Rightarrow$ widerspruch zu $\beta = \sup M$
$\Rightarrow \beta = b$ und im Fall $b \in I$ gilt $\beta \in M$
Analog für $\alpha$, also $M = I$.

□

*Beweis Korrektur:*Sei $I$ Intervall mit Grenzen $a \leq b$, $M \subset I$ offen, abgeschlossen in $I$ nicht leer
Da $M$ und $I \setminus M$ offen in $I$ gilt:
$x \in M \Rightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I \subset M$ für $\varepsilon > 0$ klein
$x \in I \setminus M \Rightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I \subset I \setminus M$ für $\varepsilon > 0$ klein
Fall 1: $\exists x_0 \in M \cap (a, b)$
$\beta = \sup \{x \in M : [x_0, x) \subset M\} \in (a, b]$
Angenommen $\beta \in I \setminus M$, dann $(\beta - \varepsilon, \beta] \subset I \setminus M$ für $\varepsilon > 0$ klein
$\Rightarrow$ ↯ zu def. $\beta$
Angenommen $\beta < b \Rightarrow \beta \in M$ (s.o.) also $[\beta, \beta + \varepsilon) \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow$ ↯ zu def. $\beta$
Also $\beta = b$ und $b \in M$ falls $b \in I$
Analog für $\alpha = \inf \{x \in M : (x, x_0] \subset M\} \in [a, b) \Rightarrow \alpha = a$ und $a \in M$ falls $a \in I$
Fall 2: $M \cap (a, b) = \emptyset$. z.B. gilt dann $b \in M \Rightarrow (b - \varepsilon, b] \cap I \subset M$
$\Rightarrow a = b, M = I = \{b\}$

□

**Satz 3.3** Sei $f : X \to Y$ stetig und $X$ zusammenhängend, so ist $Y \supset f(X)$ zusammenhängend.

*Beweis:* Sei zunächst $f$ surjektiv. Sei $M \subset Y$ nicht leer, offen und abgeschlossen
$\Rightarrow f^{-1}(M)$ nicht leer, offen und abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(M) = X \Rightarrow Y = f(X) = M$

Sei $f : X \to f(X) \subset Y$ nicht notwendig surjektiv auf $Y$, stetig bzgl Teilraumtopologie auf $f(X) \Rightarrow$ surjektiv auf $f(X)$ per definition $\Rightarrow f(X)$ zusammenhängend bzgl Teilraumtopologie

$\square$

**Bemerkung** Zusammenhang ist eine Homöomorphieinvariante

**Satz 3.4** Ist $X$ topologischer Raum, $Z \subset X$ zusammenhängend und $Z \subset Y \subset \overline{Z}$, dann ist $Y$ zusammenhängend.

**Spezialfall** $\overline{Z}$ zusammenhängend

*Beweis:* Schritt 1: $Z \subset X$ dicht, zusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend
Sei $M \subset X$ nicht leer, offen, abgeschlossen. Wäre $M \cap Z = \emptyset$ so folgt $Z \subset X \setminus M$, also $X = \overline{Z} \subset X \setminus M$ (da $X \setminus M$ abgeschlossen), Widerspruch zu $M \neq \emptyset$
$M \cap Z$ nicht leer, offen und abgeschlossen bzgl Relativtopologie auf $Z \Rightarrow M \cap Z = Z$ bzw. $Z \subset M$
$\Rightarrow X = \overline{Z} \subset \overline{M} = M$, also $M = X$
Schritt 2: Wende an auf $Z \subset Y$
Beachte $\overline{Z}^Y = \bigcap\limits_{A \text{ abgeschl. in } X, A \supset Z} A \cap Y = \left( \bigcap\limits_{A \text{ abgeschl. in } X, A \supset Z} A \right) \cap Y = \overline{Z} \cap Y = Y$
$\Rightarrow Z \subset Y$ dicht, $Z$ zusammenhängend $\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} Y$ zusammenhängend

$\square$

**Satz 3.5** Sei $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ mit $\overline{X_i} \cap \overline{X_j} \neq \emptyset$. Sind die $X_i$ zusammenhängend, so auch $X$

*Beweis:* Sei $M \subset X$ nicht leer, offen und abgeschlossen
$\Rightarrow M \cap X_i$ ist offen und abgeschlossen in $X_i$
$\Rightarrow M \cap X_i$ ist entweder leer oder $X_i \subset M$
Da $M \neq \emptyset$ gibt es ein $i_0$ mit $X_{i_0} \subset M$
Angenommen $X_i \cap M = \emptyset$ für ein $i \in I \Rightarrow X_i \subset \overline{X \setminus M} = X \setminus M$
$\Rightarrow \overline{X_i} \cap \overline{X_{i_0}} \subset (X \setminus M) \cap M = \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow X_i \subset M$ für alle $i \in I \Rightarrow M = X$

$\square$

**Satz 3.6** Seien $X, Y$ zusammenhängende topologische Räume $\Rightarrow X \times Y$ zusammenhängend

*Beweis:* $\forall x \in X$ ist $\{x\} \times Y$ homöomorph zu $Y$
$\pi_2 \mid_{\{x\}\times Y}: \{x\} \times Y \to Y$ bijektiv, stetig.
$$\underbrace{\left(\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i\right) \cap (\{x\} \cap Y)}_{\text{Offene Menge in } \{x\}\times Y} = \{x\} \times \bigcup_{\{i|x\in U_i\}} V_i$$
$\Rightarrow \pi_2 \mid_{\{x\}\times Y}$ offen. Also $\{x\} \times Y$ und $X \times \{y\}$ sind zusammenhängend
$\Rightarrow Z(x,y) = \{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$ ist zusammenhängend $(x \in X,\ y \in Y)$
Beachte $(x,y) \in \{x\} \cap Y$ und $X \times \{y\}$
$X \times Y = \bigcup_{x\in X, y\in Y} Z(x,y)$. Beachte $\underbrace{Z(x_1,y_1) \cap Z(x_2,y_2)}_{Z(x_1,y_2)} \neq \emptyset$
Nach Satz 3.5: $X \times Y$ zusammenhängend

□

**Satz 3.7** Sei $X$ topologischer Raum

(1) Jedes $x \in X$ liegt in genau einer maximalen zusammenhängenden Menge $C(x)$ =*Komponente* von $x$

(2) $C(x)$ ist abgeschlossen und $C(x) = C(y) \vee C(x) \cap C(y) = \emptyset$
Also $X$ disjunkte Vereinigung der Komponenten

*Beweis:* (1) Setze $C(x) = \bigcup_{\substack{x\in C \\ C \text{ zusammenhängend}}} C$ ist zusammenhängend nach 3.5, nach Def. maximal
Sind $C_1, C_2$ zusammenhängend maximal mit $x \in C_1 \cap C_2$ so folgt $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$ (weil maximal, zus. nach 3.5.)
(2) Nach 3.4 ist $C(x)$ zusammenhängend, also $C(x) = \overline{C(x)}$ abgeschlossen (weil maximal)

□

**Beispiel 3.1** $X$ zusammenhängend $\Rightarrow C(x) = X \forall x \in X$
$X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow C(x) = \{x\} \forall x \in \mathbb{Q}$ - verwende, dass $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \xi)$ offen, abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$X = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow C(1) = (0,\infty)$ und $C(-1) = (-\infty, 0)$

$\gamma : [0,1] \to X$ stetig heißt *Weg* in X, $\gamma(0), \gamma(1)$ Endpunkte von $\gamma$.
Gibt es zu $x, y \in X$ einen Weg $\gamma$ mit Endpunkten $x, y$ so heißen $x, y$ *verbindbar*

**Definition 3.2** Ein topologischer Raum $X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls je zwei Punkte $x, y \in X$ stets verbindbar sind.

**Bemerkung** $f : X \to Y$ stetig und $\gamma : [0,1] \to X$ mit Endpunkten $x_0, x_1$, so ist $f \circ \gamma$ ein Weg mit Endpunkten $f(X_0), f(x_1)$. Insbesondere: $X$ wegzusammenhängend, $f$ surjektiv $\Rightarrow Y$ ist wegzusammenhängend.
$\Rightarrow$ Wegzusammenhängend ist auch Homöomorphieinvariante.

**Satz 3.8** $X$ wegzusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend

*Beweis:* Sei $M \subset X$ offen, abgeschlossen und $x_0 \in M$.
Zu $x \in X$ wähle $\gamma : [0,1] \to X$ von $x_0$ nach $x$. $\gamma^{-1}(M)$ ist offen, abgeschlossen in $[0,1]$ und $0 \in \gamma^{-1}(M)$
Da $[0,1]$ zusammenhängend nach 3.2 folgt $g^{-1}(M) = [0,1]$, also insbesondere $x = \gamma(1) \in M \Rightarrow M = X$.

□

**Beispiel 3.2 Umkehrung** $X_0 = \left\{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}, X_1 = \{0\} \times [-1,1]$
$X = X_0 \cup X_1$. Behauptung: $X \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

*Beweis:* $X$ zusammenhängend: $X_0$ ist zusammenhängend (da wegzusammenhängend, Bild von $(0,\infty)$ unter stetiger Abbildung $x \to (x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)))$
Satz 3.4 $\Rightarrow \overline{X_0}$ zusammenhängend. Es gilt: $\overline{X_0} = X_0 \cup X_1 = X$
Zu $y \in [-1,1]$ gibt es eine Folge $\xi_k \to \infty$ mit $\sin(\xi_k) = y$
Es folgt $\sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = y$ mit $x_k = \frac{1}{\xi_k} \searrow 0$, bzw. $(x_k, \sin\left(\frac{1}{x_k}\right)) \to (0,y) \Rightarrow X$ ist zusammenhängend
$X$ nicht wegzusammenhängend: Sei $\gamma : [0,1) \to X$ mit $\gamma(0) = (\frac{1}{\pi}, 0), \gamma(1) = (0,0)$
Sei $\tau > 0$ mit $\gamma^1 > 0$ auf $[0,\tau), \gamma^1(\tau) = 0$. Nach Zwischenwertsatz gibt es $\tau_k^{\pm} \in [0,\tau)$ für $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\gamma'(\tau_k^+) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \Rightarrow \gamma^2(\tau_k^+) = 1$$

$$\gamma'(\tau_k^-) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \Rightarrow \gamma^2(\tau_k^-) = -1$$

Es gilt $\tau_k^+, \tau_k^- \to \tau$ mit $k \to \infty$ (sonst z.B. $\gamma^1(\tau_k^+) \geq \delta > 0$ für Teilfolge)
$\Rightarrow \gamma^2$ nicht stetig bei $\tau$ ↯

□

**Bemerkung** $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ verbindbar ist Äquivalenzrelation:
Reflexiv, symmetrisch trivial. transitiv:
$\alpha(0) = x, \alpha(1) = \beta(0) = y, \beta(1) = z$, betrachte $\beta * \alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow X$ zerfällt in Äquivalenzklassen, den *Wegkomponenten* von $X$
Beispiel 3.2: $X_0, X_1$ Wegkomponenten von $X$

**Satz 3.9** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

1. $\Omega$ ist zusammenhängend
2. $\Omega$ ist wegzusammenhängend

*Beweis:* $\mathbb{Z}$ $1 \Rightarrow 2$ :
Wähle $x_0 \in \Omega$ und definiere $M \subset \Omega$ als die Punkte, die zu $x_0$ verbindbar sind.
$x_0 \in M$, $M$ offen in $\Omega$: Sei $x \in M, \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(X) \subset \Omega$
$y \in B_\varepsilon(x)$ ist mit $x$ verbindbar: $\gamma[0,1] \to B_\varepsilon(x), \gamma(t) = (1-t)x + ty$, also $x \sim y$
$x_0 \sim x \Rightarrow x_0 \sim y$, also $B_\varepsilon(x) \subset M$
$M$ abgeschlossen in $\Omega$: Sei $x \in \Omega \setminus M$, $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$
Angenommen $\exists y \in B_\varepsilon(x) \cap M$, also $x_0 \sim y$. Aber $y \sim x$, also $x_0 \sim x$ ↯
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \in \Omega \setminus M \Rightarrow M$ abgeschlossen.
Es folgt $M = \Omega = [x_0]$

□

# 4 Konvergenz und Trennung

**Definition 4.1** Sei $X$ topologischer Raum. Eine Folge $(x_k)$ in $X$ konvergiert gegen ein $x \in X$, falls es zu jeder offenen Umgebung $U$ von $x$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k \in U$ für $k \geq k_0$
Notation: $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$ oder $x_k \to x$ mit $k \to \infty$

**Definition 4.2** $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(x_k)$, wenn die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in U\}$ nicht endlich ist für jede Umgebung $U$ von $x$

**Beispiel 4.1**

1. $x_k \to x \Rightarrow$ Häufungspunkt von $(x_k)$

2. triviale Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \Rightarrow$ Jede Folge konvergiert gegen jedes $x \in X$
   $\Rightarrow$ i.A. der Grenzwert *nicht* eindeutig bestimmt!
3. Diskrete Topologie: $\mathcal{T} = 2^X \Rightarrow$ Folge konvergiert gegen $x \Leftrightarrow x_k = x$ für hinreichend große $k$
   $x$ ist Häufungspunkt $\Leftrightarrow x_k = x$ für unendlich viele $k$
4. $X = \mathbb{R}^n \Rightarrow$üblicher Konvergenzbegriff

**Definition 4.3** $X$ heißt *Hausdorffraum* (oder $T_2$) $\Leftrightarrow \forall x \neq y \exists$ offene Umgebung $U, V, x \in U, y \in V : U \cap V = \emptyset$

**Beispiel 4.2** $(X, d)$ metrischer Raum. $x \neq y \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}d(x, y) > 0,\ B_\rho(x) \cap B_\rho(y) = \emptyset$

**Satz 4.1** In einem Hausdorffraum gelten folgende Aussagen:

1. Die Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ sind abgeschlossen
2. Für $A \subset X$ abgeschlossen gilt: $A = \bigcap_{A \subset U \text{ offen}} U$

   *Beweis:*

   1. Zu $y \neq x$ gibt es $U_y$ offen mit $x \notin U_y \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ offen
   2. Sei $x \notin A$. Zu $y \in A$ gibt es $U_y$ offen mit $x \notin U_y \Rightarrow x \notin \bigcup_{y \in A} U_y \supset A$

   $\square$

**Satz 4.2** Sei $X$ hausdorffsch, dann ist der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt (falls existent)

*Beweis:* $\mathbb{Z}$ : $x_k \to x,\ x_k \to y \Rightarrow x = y$
Andernfalls wähle offene Umgebungen $U, V$ von $x, y$ mit $U \cap V = \emptyset$. Es folgt
$x_k \in U$ für $k \geq k_0$, $x_k \in V$ für $k \geq k_1$
$\Rightarrow x_k \in U \cap V = \emptyset$ für $k \geq \max(k_0, k_1)$ ↯

$\square$

**Ziel** Folgenkriterium der Stetigkeit

**Erinnerung** Sei $X$ topologischer Raum, $x \in X$. $\mathcal{U}_x$ =System aller offenen Mengen $U$ mit $x \in U$

$\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_x$ Umgebungsbasis von $x$, falls gilt: $\forall U \in \mathcal{U}_x \exists V \in \mathcal{B} : V \subset U$
$f : X \to Y$ heißt stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)} \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} : f(U) \subset V$ *Überlege:* $f$ stetig auf $X \Leftrightarrow f$ stetig in allen Punkten $x_0 \in X$

**Satz 4.3 (Folgenkriterium der Stetigkeit)** Sei $f : X \to Y$ Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt:

1. Wenn $f$ stetig ist in $x_0$ und $x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$
2. $X$ sei in $x_0$ abzählbar[2], $f(x_k) \to f(x_0)$ für jede Folge $x_k \to x_0 \Rightarrow f$ ist stetig

*Beweis:*

1. Sei $V$ Umgebung von $f(x_0)$. Wähle $U$ Umgebung von $x_0$ mit $f(U) \subset V$.
   Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für $k \geq k_0$
   $\Rightarrow f(x_k) \in f(U) \subset V$ für $k \geq k_0$

2. (indirekt) Sei $U_k, k \in \mathbb{N}$ Umgebungsbasis von $x_0$ (o.B.d.A $U_1 \supset U_2 \supset ...$)
   Angenommen nicht stetig $\Leftrightarrow$ es gibt offene Umgebung $V$ von $f(x_0)$, so dass $f(x_k) \notin V$ für gewisse $x_k \in U_k$.
   Es folgt $x : k \to x_0$ aber $f(x_k)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$ ↯

□

**Definition 4.4** Ein Hausdorffraum $X$ heißt *normal*, wenn gilt: Für $A, B$ abgeschlossen und disjunkt gibt es $U, V \subset X$ offen mit $U \supset A$, $V \supset B$ und $U \cap V = \emptyset$
Jeder metrische Raum ist normal

**Satz 4.4 (Lemma von Urgsohn)** Sei $X$ normal und $A, B \subset X$ abgeschlossen, nichtleer und disjunkt. Es gibt $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$

**Vorbemerkung** Sei $A$ abgeschlossen, $B$ offen und $A \subset B$, dann gibt es $U$ offen mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset B$
Denn $A$ und $X \setminus B$ abgeschlossen und disjunkt, also gibt es $U, V$ offen und disjunkt mit $A \subset U, X \setminus B \subset V$
$\Rightarrow U \subset X \setminus V \Rightarrow \overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset B$

*Beweis:* $D_k = \left\{ \frac{j}{2^k} \mid j = 0, 1, ..., 2^k \right\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Definiere offene Mengen $U_s, s \in D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} D_k$ mit $\overline{U_s} \subset U_t$ für $s < t$.
Induktion: Für $k = 0$ wähle $U_0, U_1$ offen mit

[2] heißt, es gibt abzählbare Umgebungsbasis

$A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset X \setminus B$ offen
Existenz von $U_0, U_1$ folgt aus Vorbemerkung.
$k \geq 1$ : Sei $U_s$ für $s \in D_{k-1}$ schon definiert. Sei $s \in D_k \setminus D_{k-1}$, also $s = \frac{j}{2^k}$ mit $j$ ungerade.
Setze $s_\pm := \frac{j \pm 1}{2^k} \in D_{k-1}$. Es gilt induktiv $\overline{U_{s_-}} \subset U_{s_+}$. Wähle $U_s$ offen mit $\overline{U_{s_-}} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_{s_+}$
Wir müssen zeigen, dass $\overline{U_s} \subset U_t$ für $s, t \in D_k, s < t$ wieder erfüllt.

- Fall 1: $s \in D_k \setminus D_{k-1}$ und $t \in D_{k-1}$. Dann gilt $s = \frac{i}{2^k}$ und $t = \frac{j}{2^k}$, also $j > i$ (nach Annahme)
  $\Rightarrow t \geq \frac{i+1}{2^k} = s_+ \in D_{k-1} \Rightarrow \overline{U_s} \subset U_{s_+} \subset U_t$ (nach Induktion)

- Fall 2: $s \in D_{k-1}, t \in D_k \setminus D_{k-1}$ analog zu Fall 1
- Fall 3: $s, t \in D_k \setminus D_{k-1} \Rightarrow s = \frac{i}{2^k}, t = \frac{j}{2^k}$ mit $j \geq i + 2$ (weil $i, j$ ungerade)
  $\Rightarrow t_- = \frac{j-1}{2^k} \geq \frac{i+1}{2^k} = s_+$ mit $s_+, t_- \in D_{k-1}$
  $\Rightarrow \overline{U_s} \subset U_{s_+} \subset U_{t_-} \subset U_t$
  $\Rightarrow \overline{U_s} \subset U_t$ für $s, t \in D_k, s < t$ verifiziert für $D_k$

Definiere $f : X \to [0,1]$: $f(x) = \begin{cases} \inf\{s \in D \mid x \in U_s\} & \text{falls } x \in U_1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.
Da $A \subset U_0$ gilt $f\mid_A \equiv 0$, da $B \cap U_1 = \emptyset$ gilt $f\mid_B \equiv 1$
Zeige Stetigkeit von $f$: Sei $x_0 \in X$ mif $f(x_0) = s \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.
Wähle $s_1, s_2 \in D$ mit $s - \varepsilon < s_1 < s < s_2 < s + \varepsilon$. Es folgt $x_0 \in U_{s_2} \setminus \overline{U_{s_1}}$ offen
$f(x) = s \Rightarrow \exists s_k \geq s, s_k \downarrow s$ mit $x_0 \in U_{s_k} \subset U_{s_2}$ für $k$ groß
$f(U_{s_2} \setminus \overline{U_{s_1}}) \subset [s_1, s_2) \subset (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \Rightarrow$ stetig
Für $f(x_0) = 1$ betrachte Umgebung $X \setminus \overline{U_{s_1}}$
Für $f(x_0) = 0$ betrachte Umgebung $U_{s_2}, s_2 > 0$

□

**Satz 4.5** Jeder metrische Raum $X$ ist normal

**Vorbemerkung** Für $A \subset X$ nicht leer, betrachte $f : X \to [0, \infty)$, $f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.
Es gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$
$f$ ist stetig (sogar Lipschitz): $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \Rightarrow f(x) \leq d(x, y) + f(y)$
$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$

*Beweis:*Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen, disjunkt, nicht leer. Betrachte $f$ :

$X \to \mathbb{R}, f(x) = d(x, A) - d(x, B)$
Dann sind $U := \{x \in X \mid f(x) < 0\}, V := \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ offen (weil Urbilder von $f$ aus Vorbemerkung) und disjunkt
$x \in A \Rightarrow f(x) < 0,\ x \in B \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow A \subset U, B \subset V$

□

**Bemerkung** Ein Hasudorffraum $X$ ist genau dann normal, wenn das Urgsohn-Lemma gilt. Denn zu $A, B$ abgeschlossen und disjunkt, sei $f : X \to [0,1]$ mit $f\mid_A \equiv 0, f\mid_B \equiv 1 \Rightarrow U := \left\{x \in X \mid f(x) < \frac{1}{3}\right\}, V := \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{2}{3}\right\}$ sind offen und disjunkt mit $A \subset U, B \subset V$

**Satz 4.6 (Fortsetzungssatz von Tietze)** Sei $X$ normal und $C \subset X$ abgeschlossen. Zu jeder stetige Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ gibt es eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}\mid_C = f$

*Beweis:*Sei $g : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|g - f| \leq \theta$ auf $C$. Wir definieren eine Approximation $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ stetig, so dass
$\forall x \in C : g(x) \leq f(x) - \frac{\theta}{3}, \tilde{g}(x) = g(x) + \frac{\theta}{3}$ (Korrektur nach oben)
$\forall x \in C : g(x) \geq f(x) - \frac{\theta}{3}, \tilde{g}(x) = g(x) - \frac{\theta}{3}$ (Korrektur nach unten)
Wähle mit Satz 4.4 stetige Funktion $\varphi : X \to [-\frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{3}]$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{3} & x \in \left\{x \in C \mid g(x) \leq f(x) - \frac{\theta}{3}\right\} \\ -\frac{\theta}{3} & x \in \left\{x \in C \mid g(x) \geq f(x) - \frac{\theta}{3}\right\} \end{cases}$$

Dann gibt die Dreiecksungleichung: $g \in (f(x) - \frac{\theta}{3}, f(x) + \frac{\theta}{3}) \Rightarrow |\tilde{g}(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}\theta$

Wir setzen jetzt voran, dass $f : C \to [-1,1]$. Dann gilt $|f - f_0| \leq 1$ auf $C$ mit $f_0 \equiv 0$. Wir wenden das Argument induktiv an und erhalten $f_k : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|f_k - f| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ auf $C$.
Außerdem gilt für $k \in \mathbb{N}_0$: $|f_{k+1} - f(k)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$
$|f_\ell - f_k| \leq \frac{1}{3}\sum\limits_{j=k}^{\ell-1}\left(\frac{2}{3}\right)^j \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$
Also konvergiert $f_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}\mid_C = f$
$\left|\overline{f}(x)\right| \leq \frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$
Betrachte als nächstes $f : C \to (-1,1)$. Sei $\overline{f} : X \to [-1,1]$ wie konstruiert. Dann $A = \overline{f}^{-1}(\{-1\}), B = \overline{f}^{-1}(\{1\})$ sind abgeschlossen und disjunkt von $C$.
Wir beweisen: $\exists\varphi : X \to [0,1]$ stetig mit $\varphi\mid_C \equiv 1$ und $\varphi\mid_{A\cup B} \equiv 0$. Dann ist $\varphi\overline{f} : X \to (-1,1)$ stetige Fortsetzung von $f$
Entsprechend $\forall f : C \to [-c, c] \rightsquigarrow \forall f$ beschränkt.

Sei nun $f : C \to \mathbb{R}$ nicht notwendig beschränkt, dann ist $g = \arctan(f)$ beschränkt und es gibt stetige Fortsetzung $\overline{g} : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Setze $\overline{f} = \tan(\overline{g})$

□

# 5 Kompaktheit

**Definition 5.1** Sei $X$ topologischer Raum. Eine Familie $U_i, i \in I$ von offenen Mengen $U_i \subset X$ heißt *offene Überdeckung* von $X$, wenn $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$
Ist $I' \subset I$ mit $X = \bigcup\limits_{i \in I'} U_i$, so heißt die Familie $U_i, i \in I'$ *Teilüberdeckung*

**Beispiel 5.1** Das Intervall $X = (0, 1]$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ hat die offene Überdeckung $U_k = (\frac{1}{k}, 1], k \in \mathbb{N}$
Eine Teilüberdeckung ist z.B. $U_{3j}, j \in \mathbb{N}$, die Familie hat aber keine endliche Teilüberdeckung.

**Definition 5.2** Ein topologischer Raum $X$ heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung hat.
Ist $X$ zusätzlich hausdorffsch so heißt $X$ *kompakt*

**Lemma 5.1** Sei $X$ topologischer Raum. Dann ist $A \subset X$ quasikompakt bzgl. der Relativtopologie, genau dann wenn jede Überdeckung von $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset X$ offen eine endliche Teilüberdeckung hat.

*Beweis:*Sei $A$ quasikompakt bzgl. Relativtopologie und sei $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset X$ offen.
Nach Vorraussetzung gibt es $I' \subset I$ endlich mit $A = \bigcup\limits_{i \in I'} V_i \cap A \subset \bigcup\limits_{i \in I'} V_i$✓
Sei $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i$ offen in $A$. Dann gibt es $V_i \subset X$ offen mit $U_i = V_i \cap A$, also $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$. Wähle $I \subset I'$ endlich mit $A \subset \bigcup\limits_{i \in I'} V_i$ und erhalten $A = \bigcup\limits_{i \in I'} V_i \cap A = \bigcup\limits_{i \in I'} U_i$

□

**Satz 5.1 (Bilder kompakter Mengen)** Seien $X, Y$ topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig, dann gilt:
$K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K) \subset Y$ quasikompakt.

*Beweis:* Sei $V_i, i \in I$ offen in $Y$ mit $f(K) \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$

$\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ mit $f^{-1}(V_i)$ offen, da $f$ stetig.

$\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{i \in I'} f^{-1}(V_i)$ mit $I' \subset I$ endlich, da $K$ quasikompakt

$\Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{i \in I'} f(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcup\limits_{i \in I'} V_i$

Nach Lemma 5.1 $\Rightarrow f(K) \subset Y$ quasikompakt

□

**Satz 5.2 (abgeschlossene Mengen in kompakten Räumen)** Sei $X$ quasikompakter topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $A$ quasikompakt (mit der Relativtopologie)

*Beweis:* Sei $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset X$ offen.

$\Rightarrow X \setminus A$ und $V_i, i \in I$ bilden offene Überdeckung von $X$.

$\Rightarrow X = X \setminus A \cup \bigcup\limits_{i \in I'} V_i$ mit $I' \subset I$ endlich

$\Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{i \in I'} V_i \Rightarrow$ nach Lemma 5.1 $A$ quasikompakt.

□

**Bemerkung** $X$ hausdorff, so ist jeder Teilraum $M \subset X$ ebenfalls hausdorff.
Zu $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2$ wähle $V_1, V_2 \subset X$ offen mit $x_i \in V_i, V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann sind $U_i = V_i \cap M$ offen in $M$, $x_i \in U_i, U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

**Satz 5.3 (Kompakt⇒abgeschlossen)** Sei $X$ Hausdorffraum. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist $K$ abgeschlossen in $X$.

*Beweis:* Sei $y \notin K$ fest gewählt. Gesucht: Umgebung, die $K$ nicht trifft.
Zu $x \in K$ gibt es offene Umgebungen $U_x, V_y$ von $x, y$ mit $U_x \cap V_y = \emptyset$

Da $K$ kompakt gibt es $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{xi}$

$\Rightarrow V = \bigcap\limits_{i=1}^{N} V_{yi}$ offene Umgebung von $y$ mit $V \cap K = \emptyset \Rightarrow K$ abgeschlossen

□

**Folgerung 5.1 (Homöomorphiekriterium)** Sei $X$ quasikompakt und $Y$ hausdorffsch. Ist $f : X \to Y$ stetig und injektiv, so ist $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig, d.h. $f : X \to f(X)$ ist homöomorph.

*Beweis:*$\not{Z}$ : $f$ ist offen
Sei $U \subset X$ offen $\Rightarrow A = X \setminus U$ abgeschlossen
$\Rightarrow A \subset X$ quasikompakt nach Satz 5.2
$\Rightarrow f(A) \subset Y$ quasikompakt (bzw. kompakt) nach Satz 5.1
$\Rightarrow f(A) \subset Y$ abgeschlossen nach Satz 5.3
$\Rightarrow Y \setminus f(A)$ offen in $Y$
$\Rightarrow f(U) = f(X) \cap \underbrace{(Y \setminus f(A))}_{\text{offen}}$ (weil injektiv) ist offen in $f(X)$ bzgl Relativtopologie.

□

**Lemma 5.2 (endliche Durchschnittseigenschaft)** Für einen topologischen Raum $X$ sind äquivalent:

1. $X$ ist quasikompakt
2. Sind $A_i, i \in I$ abgeschlossen mit $\bigcap_{i \in I'} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Indexmenge $I' \subset I$, so folgt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

*Beweis:*Seien $A_i, i \in I$ abgeschlossen und $U_i = X \setminus A_i$. Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$$

Das bedeutet $U_i, i \in I$ Überdeckung $\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$
$U_{i'}, i' \in I'$ Überdeckung $\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I'} A_i = \emptyset$
$1 \Rightarrow 2$ : Wäre $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so wäre $U_i, i \in I$ eine Überdeckung. Wähle endliche Teilüberdeckung $U_i, i \in I'$. Es folgt $\bigcap_{i \in I'} A_i = \emptyset \lightning$
$2 \Rightarrow 1$ : Sei $U_i, i \in I$ Überdeckung $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$
$\Rightarrow \exists I' \subset I$ endlich mit $\bigcap_{i \in I'} A_i = \emptyset$
$\Rightarrow U_i, i \in I'$ Überdeckung.

□

**Definition 5.3** Ein Hausdorffraum heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge hat.

**Satz 5.4** Sei $X$ Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie. Dann sind äquivalent:

1. $X$ ist kompakt
2. $X$ ist folgenkompakt

*Beweis:* $1 \Rightarrow 2$ : Sei $(x_k)$ eine Folge in $X$. Angenommen $(x_k)$ hat keinen Häufungspunkt. Dann gibt es zu $y \in X$ eine ofene Umgebung $U_y$ mit $x_k \notin U_y$ für $k$ hinreichend.
Wähle endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{yi}$. Für $k$ groß gilt
$x_k \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{yi} = X \lightning$
Sei jetzt $x_0$ Häufungspunkt der Folge. Nach Vorraussetzung gibt es Umgebungsbasis $U_1 \supset U_2 \supset ...$ von $x_0$
Bestimme induktiv $k_1 < k_2 < ...$ mit $x_{k_j} \in U_j \Rightarrow x_0 = \lim\limits_{j \to \infty} x_{k_j}$
$2 \Rightarrow 1$ : Angenommen $X$ hat Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Wir können annehmen, dass aus den Basismengen $U_1, U_2, ...$ keine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann.
Bestimme induktiv $x_k \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$.
Es gilt $x_{k_j} \to x_0 \in X$ nach Wahl einer Teilfolge $(k_1 < k_2 < ...)$
Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \in U_k$. Für $j$ groß gilt $k_j \geq k$, also $x_{k_j} \notin U_k \lightning$ zu $x_{k_j} \to x_0$

□

**Satz 5.5** Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1. $M$ ist kompakt
2. $M$ abgeschlossen und beschränkt

*Beweis:* $1 \Rightarrow 2$ : $M$ ist abgeschlossen nach Satz 5.3
$M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k(0)$ hat endliche Teilüberdeckung $\Rightarrow$ beschränkt.
$2 \Rightarrow 1$ : Reicht zu zeigen: $Q = [-a, a]^n$ kompakt für $a > 0$ (Verwende Satz 5.2)
Sei $U_i, i \in I$ Überdeckung von $Q$ ohne endliche Teilüberdeckung. Konstruieren durch Kantenhalbierung Folge $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset ...$ so dass kein $Q_k$ durch endlich viele der $U_i$ überdeckt wird. Die $Q_i$ bilden eine Intervallschachtelung.
Sei $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Q_k = \{x_0\}$ mit $x_0 \in Q$.
Es gilt: $x_0 \in U_i$ für ein $i \in I$. Da $U_i$ offen gilt $Q_k \subset U_i$ für $k$ hinreichend groß.
$Q_k$ wird $U_i$ überdeckt für $k$ groß $\lightning$

□

**Satz 5.6** Sei $X$ quasikompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ beschränkt und nimmt seine Extremwerte an.

*Beweis:* $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt nach Satz 5.1, also abgeschlossen und beschränkt

□

**Satz 5.7** $X$ kompakter topologischer Raum $\Rightarrow X$ normal

*Beweis:* $X$ hausdorff nach Definition.
Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt $\Rightarrow A, B$ sind kompakt (nach Satz 5.2)
Schritt 1: Zu $x \notin B$ gibt es $U, V$ offen mit $x \in U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$:
Zu $y \in B$ gibt es $U_y, V_y$ mit $x \in U_y, y \in V_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$
Wähle endliche Teilüberdeckung $B \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{yi} =: V$. Setze $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_{yi} \Rightarrow U \cap V = \emptyset$
Schritt 2: Zu $x \in A$ gibt es nach Schritt 1 offene Mengen $U^x, V^x$ mit $x \in U^x, B \subset V^x$ und $U^x \cap V^x = \emptyset$.
Wähle endliche Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{j=1}^{M} U^{xj} =: U$
Setze $V = \bigcap_{j=1}^{M} V^{xj}$. Dann sind $U, V$ offen, $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$

□

**Beispiel 5.2 (Kompaktheit von Produkten)** Sei $X$ topologischer Raum. $X^{\mathbb{R}} = \{(x_t)_{t \in \mathbb{R}} \mid x_t \in X\} = \{x : \mathbb{R} \to X \mid x = x(t)\}$. Basismengen: $U = \{x : \mathbb{R} \to X : x(t) \in U(t)\}$ mit $U(t) \subset X$ offen und $U(t) = X$ außer für endlich viele $t \in \mathbb{R}$

**Frage** Was bedeutet konvergenz in $X^{\mathbb{R}}$?
Projektion auf Faktor mit Nummer $t$=Auswertung der Funktion $x : \mathbb{R} \to X$ an der Stelle $t$
$x_k \to x$ in $\mathbb{R} \Rightarrow x_k(t) \to x(t)$ in $X$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. $x_k$ konvergiert punktweise gegen $x$.
Es gilt auch die Umkehrung: Sei $U \subset X^{\mathbb{R}}$ Basismenge mit $x \in U$, also $U(t) = X$ außer für $t = t_1 ... t_N$.
Für $k$ groß gilt $x_k(t_i) \in U(t_i)$ für alle $i = 1, ..., N$
$\Rightarrow x_k \in U$ für $k$ hinreichend groß
$\Rightarrow x_k \to x$ in $X^{\mathbb{R}}$.
*Zusammenfassung:* Konvergenz in $X^{\mathbb{R}}$=punktweise Konvergenz

**Definition 5.4** Sei $M$ eine Menge. Eine Relation $x \leq y$ auf $M$ heißt *teilweise Ordnung*, wenn gilt:

- Reflexivität: $x \leq x$
- Transitivität: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Definitheit: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

Falls außerdem für alle $x, y \in M$ eine der Relationen $x \leq y$ bzw. $y \leq x$ gilt, so heißt $M$ *total geordnet*

**Beispiel 5.3** Kantenrelation bei Bäumen ist i.A. nicht total geordnet

Sei $L \subset M$. Ist $y \in M$ mit $x \leq y$ für alle $x \in L$, so heißt $y$ *obere Schranke* von $L$. M heißt *induktiv geordnet*, wenn jede total geordnete Menge $L \subset M, L \neq \emptyset$ eine obere Schranke besitzt.

**Beispiel 5.4** Sei $X$ eine Menge. Dann ist $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$ eine teilweise Ordnung auf $2^X$. Ist $S \subset 2^X$ total geordnet, so ist $B = \bigcup_{A \in S} A$ obere Schranke, also ist $2^X$ mit Inklusion induktiv geordnet

$x \in M$ heißt maximales Element, wenn gilt: $x \leq y \Rightarrow y = x$

**Axiom 5.1 (Zornsches Lemma)** Sei $M \neq \emptyset$ induktiv geordnet, dann existiert ein maximales Element $x \in M$

**Satz 5.8 (Tychomov)** Seien $X_i, i \in I$ quasikompakt, dann ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ quasikompakt.

*Beweis:*Wir verwenden Lemma 5.2. Sei $\mathcal{A}_0 \subset 2^X$ ein System abgescjlossener Mengen in $X$ mit $\bigcap_{A \in \mathcal{A}'_0} A \neq \emptyset$ für alle $\mathcal{A}'_0 \subset \mathcal{A}_0$ endlich.
$\mathbb{Z}$: $\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset$
Sei $M$ die Menge alles Systeme $\mathcal{A} \subset 2^X$, so dass $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ und endliche Durchschnittseigenschaft hat.
$M$ ist teilweise geordnet durch Inklusion (Beispiel 5.4)
Sei $L \subset M$ total geordnet. Bilde das System $\mathcal{A}^L = \left\{A \subset 2^X \mid A \in \mathcal{A} \text{ für ein } \mathcal{A} \in L\right\}$
Es folgt $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}^L$ und $\mathcal{A}^L$ erfüllt endliche Durchschnittseigenschaft.
Für $A_1, ..., A_N \subset \mathcal{A}^L$ gilt schon $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für ein $\mathcal{A} \in L$.

Da $\mathcal{A} \in M$ folgt $\bigcap_{i=1}^{N} A_i \neq \emptyset$, also gilt endliche Durchschnittseigenschaft für $\mathcal{A}^L$
$\Rightarrow M$ induktiv geordnet $\Rightarrow$ (Zorn) es gibt ein $\mathcal{A} \in M$ maximal
Die Systeme $\mathcal{A}_i = \left\{\overline{p_i(A)} \mid A \in \mathcal{A}\right\}$ ($p_i$ Projektion) haben die endliche Durchschnittseigenschaft:
$\bigcap_{A\in\mathcal{A}'} \overline{p_i(A)} = \overline{p_i(\underbrace{\bigcap_{A\in\mathcal{A}'} A}_{\neq\emptyset})} \neq \emptyset$ ($\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ endlich)
Da $X_i$ quasikompakt existiert ein Punkt $x_i \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{p_i(A)} \subset X_i$
$\mathbb{Z}$: $x = (x_i)_{i\in I} \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A$
Schritt 1:$\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten:
Seien $A_1, ..., A_N \in \mathcal{A}$. Für $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{A_1\cap, ..., \cap A_N\}$ gilt $\mathcal{A}_0 \in \tilde{\mathcal{A}}$ und endliche durchschnittseigenschaft gilt für $\tilde{\mathcal{A}}$. Aus der maximalität folgt $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, somit $A_1\cap, ..., A_N \in \mathcal{A}$ Schritt 2: $B \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in \mathcal{A}$
$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{B\}$ enthält $\mathcal{A}_0$ und hat endliche Durchschnittseigenschaft:
$\underbrace{A_1 \cap ... \cap A_N}_{\in\mathcal{A}} \cap B \neq \emptyset$. Aus Maximalität folgt $B \in \mathcal{A}$
Schritt 3: $U$ Basisumgebung von $x \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \forall A \subset X$
Es gibt $I' \subset I$ endlich und $V_i \subset X_i$ offen für $i \in I'$, so dass $x \in U = \bigcap_{i\in I'} U_i$ mit $U_i = p_i^{-1}(V_i)$
Nun gilt für $i \in I'$: $x_i \in V_i \cap \overline{p_1(A)}$ für alle $a \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow X_i \cap p_1(A) \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (sonst $p_1(A) \subset X_i \setminus V_i) \Rightarrow \overline{p_i(A)} \subset X_i \setminus V_i$ ↯
$\Rightarrow U_i \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{A}$
fail

□

**Bemerkung** Sei Umgekehrt $X = \prod_{i\in I} X_i$ quasikompakt. Da die Projektion $p_i : X \to X_i$ stetig ist, ist $X_i = p_i(X)$ quasikompakt (Satz 5.1)

**Beispiel 5.5 (Fortsetzung)** Sei $X = \{0, 1\}$ mit diskreter Topologie ($X$ ist kompakt) $X^{\mathbb{R}}$ =Abb$(\mathbb{R}, X)$ ist quasikompakt (Tychonoff). Betrachte Folge $x_k(t) = k$-te Nachkommastelle von $t \in \mathbb{R}$ in der Dualbruchentwicklung von $t$
$x_k(t) \to x(t) \Leftrightarrow x_k(t) = x(t)$ für $k$ hinreichend groß $\Rightarrow x(t) \in \mathbb{Q}$
$x_k$ hat keine konvergente Teilfolge $\Rightarrow X^{\mathbb{R}}$ nicht folgenkompakt

**Definition 5.5** Sei $X$ Hausdorffraum

1. $M \subset X$ heißt *relativkompakt* $\Leftrightarrow \overline{M}$ ist kompakt

2. $X$ heißt *lokalkompakt* $\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt eine relativ kompakte (offene) Umgebung

**Beispiel 5.6**

- $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt, denn zu $x \in \mathbb{R}^n$ ist $B_1(x)$ relativ kompakte Umgebung von $x$
- Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt bzgl der Relativtopologie
- Ein Hausdorffraum $X$ heißt *topologische Mannigfaltigkeit der Dimension* $n$, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x$ hat, die homöomorph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist.

**Lemma 5.3** Sei $X$ lokalkompakter topologischer Raum. Dann hat jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus relativkompakten Mengen

*Beweis:* Sei $V \subset X$ offen mit $x \in V$ und $\overline{V}$ kompakt. Sei $U$ irgendeine offene Umgebung von $x$
$\Rightarrow U \cap V$ offene Umgebung um $x$, $(U \cap V) \subset U$
$\overline{U \cap V}$ abgeschlossene Teilmenge von $\overline{V}$ ist kompakt
$\Rightarrow \overline{U \cap V}$ kompakt (nach Satz 5.2) $\Rightarrow U \cap V$ ist relativkompakt

□

**Satz 5.9 (Alexandrov-Kompaktifizierung)** Sei $X$ lokalkompakter topologischer Raum. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\gamma : X \to \hat{X} \setminus \{\infty\}$, wobei $\hat{X}$ kompakter topologischer Raum und $\infty \in \hat{X}$. Das Paar $(\hat{X}, \infty)$ ist eindeutig bestimmt bis auf Homöomorphismus

*Beweis:* Definiere $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$

Definiere $V \subset \hat{X}$ offen $\Leftrightarrow \begin{cases} V \subset X \text{ offen} \\ V = \hat{X} \setminus K \text{ für } K \subset X \text{ kompakt} \end{cases}$

Wir müssen prüfen, dass das eine Topologie ist:

- $\emptyset \checkmark$(Typ 1) $\quad \hat{X} = \hat{X} \setminus \emptyset \checkmark$(Typ 2)
- $V_1 \cap V_2 \begin{cases} V_1 \cap V_2 & V_1, V_2 \text{ Typ 1} \\ (X \setminus K_1) \cap V_2 & V_1 = \hat{X} \setminus K_1, V_2 \subset X \text{ offen } (X \setminus K_1 \text{ offen nach Satz 5.3}) \\ \hat{X} \setminus (K_1 \cap K_2) & V_i = \hat{X} \setminus K_i \end{cases}$
- $\bigcup_{i \in I} V_i = \begin{cases} \bigcup_{i \in I} V_i & V_i \subset X \\ \hat{X} \setminus \bigcap_{i \in I} K_i & V_i = \hat{X} \setminus K_i \\ \hat{X} \setminus (K_1 \setminus V_2) & V_1 = \hat{X} \setminus K_1, V_2 \subset X \text{ offen} \end{cases}$

Behauptung: $\hat{X}$ kompakter topologischer Raum:
$\hat{X} = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_1 \subset \hat{X}$ offen
Wähle $i_0 \in I$ mit $V_{i_0} = \hat{X} \setminus K_{i_0}$ mit $K_{i_0}$ kompakt
$\Rightarrow K_{i_0} = \bigcup_{i \in I'} V_i \cap X$ mit $I' \subset I$ endlich ($K_{i_0}$ kompakt in $X$)
$\Rightarrow \hat{X} = V_{i_0} \cup \bigcup_{i \in I'} V_i$ endlich.
Die Inklusionsabbildung $j : X \to \hat{X}$ ist injektiv und stetig

$$j^{-1}(V) = \begin{cases} V & \text{Typ 1} \\ X \setminus K & V = \hat{X} \setminus K \text{ Typ 2} \end{cases}$$

Umgekehrt: Sei $V \subset X$ offen. Dann ist $j(V) = V \subset \hat{X}$ offen, also homöomorphismus
Bleibt Z.z.: Eindeutigkeit

□

**Bemerkung** Anwendung im Fall $X$ kompakt (langweilig) $\Rightarrow X$ offen und abgeschlossen in $\hat{X}$, also $\{\infty\}$ offene Teilmenge von $X$

**Definition 5.6** Ein lokalkompakter Raum $X$ heißt *abzählbar im Unendlichen*, wenn der Punkt $\infty$ in der Alexandrov-Kompaktifizierung eine abzählbare Umgebungsbasis hat

**Satz 5.10** Für einen lokalkompakten Raum sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $X$ ist abzählbar im Unendlichen
2. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ mit $K_i$ kompakt
3. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ mit $U_i$ offen, relativ kompakt ($\overline{U_i} \subset U_{i+1}$)

Notation: $U_i \subset\subset U_{i+1}$

*Beweis:* 1⇒2: Sei $\hat{X} \setminus K_i$ mit $K_i \subset X$ kompakt eine abzählbare Umgebungsbasis von $\infty$. Zu $x \in X$ wähle relativ kompakte Umgebung $U$. Es gibt dann $i \in \mathbb{N}$ mit $\hat{X} \setminus K_i \subset \hat{X} \setminus \overline{U} \Rightarrow K_i \supset \overline{U} \Rightarrow x \in K_i$
2⇒ 3: Zu $K \subset X$ kompakt existiert $U \subset X$ offen, relativ kompakt mit $K \subset U$, denn zu $x \in X$ gibt es $U_x$ offen, relativ kompakt mit $x \in U_x$. Wähle endliche Teilüberdeckung von $K$. Wir können annehmen, dass $K_1 \subset K_2 \subset ....$ Erhalte induktiv $U_i$ durch Anwendung auf $K_i \cup \overline{U}_{i-1}$ (wähle $U_0 = \emptyset$)
3⇒1: Sei $K \subset X$ kompakt. Da $U_i, i \in \mathbb{N}$ Überdeckung von $X$, gilt $K \subset U_k \subset \overline{U}_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $\hat{X} \setminus \overline{U}_k \subset X \setminus K$, das heißt die $\hat{X} \setminus \overline{U}_k$ bilden abzählbare Umgebungsbasis von $\infty$

□

**Definition 5.7** Seien $X, Y$ lokal kompakte Räume. EIne stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, falls folgende Implikation gilt:
$K \subset Y$ kompakt $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset X$ kompakt

**Satz 5.11** Seien $X, Y$ lokal kompakte Räume $f : X \to Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist eigentlich
2. Die Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ mit $\hat{f}(\infty) = \infty$ ist stetig

*Beweis:*1⇒2: Sei $K \subset Y$ kompakt. Dann ist $\hat{X} \setminus f^{-1}(K)$ offene Umgebung von $\infty$ und $\hat{f}(\hat{X} \setminus f^{-1}(K)) \subset \hat{Y} \setminus K$, also ist $\hat{f}$ stetig in $\infty$.
2⇒1: Da $\hat{f}$ stetig gibt es zu $K \subset Y$ kompakt eine kompakte Menge $K_0 \subset X$ mit $\hat{f}(X \setminus K_0) \subset \hat{Y} \setminus K$. (Nach Satz 5.2)

□

**Satz 5.12** Seien $X, Y$ lokal kompakt, $f : X \to Y$ sei eigentlich. Dann gilt:

1. $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow f(A) \subset Y$ abgeschlossen.
2. $f(X)$ ist lokalkompakte Teilmenge von $Y$

*Beweis:*1: $A$ abgeschlossen in $X \Rightarrow A \cup \{\infty\}$ abgeschlossen in $\hat{X}$, also $A$ kompakt (Satz 5.2)
$\Rightarrow f(A) \cup \{\infty\} = \hat{f}(A \cup \{\infty\})$ kompakt (Satz 5.1) $\Rightarrow f(A) \cup \{\infty\}$ abgeschlossen in $\hat{X}$
$\Rightarrow f(A)$ abgeschlossen in $X$
2: $f(X)$ abgeschlossene Teilmenge von $Y$. Zu $y \in f(X)$ wähle relativ kompakte Umgebung $V \Rightarrow V \cap f(X)$ ist relativ kompakte Umgebung bzgl. der Relativtopologie auf $f(X)$: $V \cap f(X)$ ist kompakte Teilmenge von $f(X)$, denn sei $\overline{V} \cap f(X) = \bigcup_{i \in I} V_i \cap f(X)$. Dann gilt $\overline{V} = \bigcup_{i \in I} V_i \cup (Y \setminus f(X))$. Da $\overline{V}$ kompakt gibt es $I' \subset I$ endlich mit $\overline{V} = \bigcup_{i \in I'} V_i \cup (Y \setminus f(X))$, also $\overline{V} \cap f(X) \subset \bigcup_{i \in I'} V_i \cap f(X)$
$V \cap f(X)$ ist relativ kompakte Umgebung von $Y$ bzgl der Relativtopologie, denn $\overline{V \cap f(X)}^{f(X)} \subset \overline{V} \cap f(X)$, da $\overline{V} \cap f(X)$ kompakt, also abgeschlossen.

□

**Definition 5.8** Ein Hausdorffraum $X$ heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ eine *Verfeinerung* $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ besitzt, die *lokal endlich* ist. Dabei heißt

- $\mathcal{U}$ Verfeinerung von $\mathcal{V}$, falls $\mathcal{U}$ Überdeckung von $X$ ist und für jedes $i \in I$ ein $j \in J$ existiert, mit $U_i \subset V_j$
- $\mathcal{U}$ ist lokal endlich, wenn zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U_x$ existiert mit $\{i \in I : U_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich

**Beispiel 5.7** Sei $X$ lokal kompakt und im unendlichen abzählbar. Dann ist $X$ parakompakt, denn sei $X = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} W_k$ mit $\overline{W}_{k-1} \subset W_k, w_0 = \emptyset$. Sei $\{V_j\}_{j \in J}$ offene Überdeckung von $X$. Wähle zu $k \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $J_k \subset J$ mit $\overline{W}_k \setminus W_{k-1} \subset \bigcup\limits_{j \in J_k} V_i \setminus W_{k-1} =: \bigcup\limits_{j \in J_k} U_{j,k}$. Die $U_{j,k}$ mii $k \in \mathbb{N}, j \in J_k$ bilden eine Überdeckung von $X$, genauer eine Verfeinerung $U_{j,k} \subset V_j$. Weiter gilt $U_{j,k} \cap W_\ell = \emptyset$ f+r $k \geq \ell + 1$, also $U_{k,j} \cap W_\ell \neq \emptyset$ nur für endlich viele $U_{j,k}$.

**Bemerkung** Sei $X$ lokalkompakt mit abzählbarer Basis $U_i, i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $X = \bigcup\limits_{\overline{U}_i \text{ kompakt}} U_i$

Insbesondere ist $X$ in $\infty$ abzählbar (Satz 5.10)

Wähle zu $x \in X$ eine relativkompakte Umgebung $V$. Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_i \subset V$.
$\Rightarrow \overline{U}_i \subset \overline{V}$ ist kompakt, also $\overline{U}_i$ kompakt.

**Beispiel 5.8** Sei $X$ topologische Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann ist $X$ parakompakt.

**Beispiel 5.9** Jeder metrische Raum $(X, d)$ ist parakompakt (Satz von Stone)

**Satz 5.13** Ist $X$ parakompakt, so ist $X$ normal

> *Beweis: Hilfsaussage:* Sei $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Es gebe zu jedem $a \in A$ offene Mengen $U_a, V_a$ mit $a \in U_a, B \subset V_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$. Dann gibt es $U, V$ offen mit $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$
>
> > *Beweis davon:* Es gilt $X = \bigcup\limits_{a \in A} U_a \cup (X \setminus A)$ mit $U_a, X \setminus A$ offen.
> > Sei $U_i, i \in I$ eine lokal endliche Verfeinerung. Definiere $I' = \{i \in I \mid U_i' \cap A \neq \emptyset\}, U = \bigcup\limits_{i \in I'} U_i'$
> > Es folgt $A \subset U$ und $U$ offen.
> > Zu $b \in B$ gibt es offene Umgebung $W_b$, so dass $I_b = \{i \in I' \mid U_i' \cap W_b \neq \emptyset\}$

endlich.
Zu $i \in I_b$ gibt es ein $a_i \in A$ mit $U'_i \subset U_{a_i}$, da $U'_i \not\subset X \setminus A$
$\Rightarrow U'_i \cap V_{a_i} \subset U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$. Setze $V'_b = W_b \cap \bigcap\limits_{i \in I_b} V_{a_i}$ offen
$\Rightarrow b \in V'_b$ und $U \cap V'_b = \emptyset$. Wähle nun $V = \bigcup\limits_{b \in B} V'_b$

□

Gegeben seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Sei $b \in B$. Da $X$ hausdorff gibt es zu jedem $a \in A$ offene Mengen $U_a, V_a$ mit $a \in U_a, b \in V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$. Vorraussetzung der Hilfsaussage erfüllt für $A$ und $\{b\}$. Also gibt es offene Mengen $U'_b, V'_b$ offen mit $A \subset U'_b, b \in V'_b$ mit $U'_b \cap V'_b = \emptyset$
Wieder mit Hilfsaussage erhalte $U, V$ offen mit $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$

□

**Definition 5.9** Sei $X$ topologischer Raum

a) Eine Familie $\{\chi_i \mid i \in I\}$ von stetigen Funktionen $\chi_i : X \to [0,1]$ heißt *Partition der Eins*, wenn gilt:

   - $\mathrm{spt}\chi_i, i \in I$ (Träger) ist lokal endlich, d.H. für alle $x \in X$ gibt es Umgebung $U_x$ mit $\{i \in I \mid \mathrm{spt}\chi_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich
   ($\mathrm{spt}f = \overline{x \in X : f(x) \neq 0}$)
   - $\sum\limits_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ für alle $x \in X$ (Die Somme ist nur formal unendlich - genauer gibt es zu $x \in X$ eine Umgebung $U_x$ mit $I_x := \{i \in I \mid \mathrm{spt}\chi_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich, $\Rightarrow \left(\sum\limits_{i \in I} \chi_i\right)(y) = \sum\limits_{i \in I_x} \chi_i(y) \forall y \in U_x$. Insbesondere ist eine solche lokal-endliche Summe immer stetig)

b) Eine Partition der Eins $\chi_i, i \in I$ heißt der Überdeckung $V_j, j \in J$ *untergeordnet*, wenn es zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ gibt mit $\mathrm{spt}\chi_i \subset V_j$

**Satz 5.14 (Existenz der Partition der Eins)** Sei $X$ parakompakter topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $V_j, j \in J$ eine untergeordnete Partition der Eins.

*Beweis:* Da $X$ parakompakt, können wir annehmen, dass $V_j, j \in J$ lokal endlich ist (sonst betrachte lokal endliche Verfeinerung)
Schritt 1: Konstruiere Überdeckung $U_j, j \in J$ mit $\overline{U}_j \subset V_j$

*Beweis davon:* zu $x \in X$ wähle $j_x \in J$ mit $x \in V_{j_x}$. Es gibt offene Umgebung $O_x$ von $x$ mit $\overline{O}_x \subset V_{j_x}$
da $X$ normal nach Satz 5.13 gibt es $O_x, W$ offen mit $x \in O_x, X \setminus V_j \subset W$ und $O_x \cap W = \emptyset$

$\Rightarrow \overline{O}_x \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset V_j$. vgl. Vorbemerkung Satz 4.4 (Urgsohn)
Wähle lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung $O_x, x \in X$. Diese sei $O_i', i \in I$. Setze $I_j = \left\{ i \in I \mid \overline{O}_i' \subset V_j \right\}, U_j = \bigcup_{i \in I_j} O_i'$
Zeige: $U_j$ hat die verlangten Eigenschaften
Für jedes $i \in I$ gilt $O_i' \subset O_x$ mit $x \in X$ geeignet. $\overline{O}_i' \subset \overline{O}_x \subset V_{j_x} \Rightarrow i \in I_{j_x}$. Somit gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{i \in I} O_i' = X$
Da $O_i', i \in I$ lokal endlich gibt es zu $x \in U_j$ eine Umgebung $V$ und $I_j' \subset I_j$ endlich mit $U_j \cap V = \left( \bigcup_{i \in I_j'} O_i' \right) \cap V$

$\Rightarrow \overline{U}_i \cap V \subset \left( \bigcup_{i \in I_j'} \overline{O}_i' \right) \cap V \subset V_{j'} \Rightarrow \overline{U}_j \subset V_j$

□

Schritt 2: Konstruktion der Partition der Eins
Wiederhole Schritt 1: finde offene Überdeckung $O_j, j \in J$ mit $O_j \subset \overline{O}_j \subset U_j \subset \overline{U}_j \subset V_j$. Definiere stetige Funktion $\varphi_j : X \to [0,1]$ mit $\varphi_j |_{\overline{O}_j} \equiv 1$ und $\varphi_j |_{X \setminus U_j} \equiv 0$.
$\varphi_j$ existiert nach Lemma von Urgsohn (Satz 4.4)
Nach Konstruktion spt$\varphi_j \subset \overline{U}_j \subset V_j$, insbesondere *spt*$\varphi_j$ lokal endlich (da $V_j$ lokal endlich)
Da $O_j, j \in J$ überdecken $\underbrace{\sum_{j \in J} \varphi_j(x)}_{\text{stetige Funktion}} \geq 1$ für alle $x \in X$
Definiere $\chi_j : X \to [0,1], \chi_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{j \in J} \varphi_j(x)}$. Dann ist $\chi_j$ stetig und hat alle gewünschten Eigenschaften.

□

## Peanokurven (Exkurs)

Wir beginnen mit der *Cantormenge*: $x \in [0,1]$ hat triadische Darstellung:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \qquad (x_j \in \{0,1,2\}$$

**Definition (Cantormenge)** $C = \left\{ x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \mid x_j \in \{0,2\} \right\}$

**Lemma** Seien $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$ und $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$. Es gelte $x_j = y_j$ für $j = 1, ..., N-1$, aber $|x_N - y_N| = 2$. Dann folgt $|x - y| \geq 3^{-N}$

*Beweis:* $|x-y| = \left| \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j - y_j) 3^{-j} \right| \geq 2 \cdot 3^{-N} - \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j}$
$= 2 \cdot 3^{-N} - 2 \cdot 3^{-(N+1)} \sum\limits_{j=0}^{\infty} 3^{-j} = 3^{-N}$

□

Setze $C_n = \left\{ x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \mid x_j \in \{0,2\} \text{ für } j = 1, ..., n \right\} \Rightarrow [0,1] = C_0 \supset C_1 \supset ... \supset C$

**Lemma** Es gilt:

1. $C_{n+1} = \left\{ \frac{x}{3} \mid x \in C_n \right\} \cup \left\{ \frac{2}{3} + \frac{x}{3} \mid x \in C_n \right\}$ (disjunkt)
2. $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n$

*Beweis:* (1): $C_{n+1} = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \mid x_j \in \{0,2\} \text{ für } j \leq n+1 \right\}$
$\frac{1}{3} C_n = \left\{ \sum\limits_{j=2}^{\infty} y_j 3^{-j} \mid y_j \in \{0,2\} \text{ für } 2 \leq j \leq n+1 \right\} = \{x \in C_{n+1} \mid x_1 = 0\}$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n = \{x \in C_{n+1} \mid x_1 = 2\} \Rightarrow$Behauptung
(2): klar ist, dass $C \subset \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n$. Für $x \in C_n$ sind die ersten $n$ Ziffern in $\{0,2\}$ eindeutig bestimmt (Lemma)
$x \in C_1 \Rightarrow x = 0, x_1 ...$ mit $x_1 \in \{0,2\}$
$x \in C_2 \Rightarrow x = 0, x_1 x_2 ...$ mit $x_1, x_2 \in \{0,2\}$ $\vdots$
$\Rightarrow x = 0, x_1 x_2 ... \in C$

□

**Satz (Eigenschaften der Cantormenge)**

1. $C \subset [0,1]$ ist abgeschlossen
2. Jedes $x \in C$ ist Häufungspunkt von $C$

3. $[0,1] \setminus C$ ist dicht in $[0,1]$ ($C$ ist nirgends dicht)
4. $C$ ist überabzählbar
5. $C = \frac{1}{3}C \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$ ($C$ ist selbstähnlich)

   *Beweis:*1: $C_0 = [0,1]$ ist abgeschlossen $\Rightarrow C_n$ ist abgeschlossen (Induktion, nach Lemma) $\Rightarrow C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ ist abgeschlossen

   $\square$

Betrachte jetzt 30°-60°-90°-Dreieck $\Delta$ im $\mathbb{R}^2$, oBdA diam$\Delta = 1$ mit Zerlegung in Teildreiecke über die Höhen, bezeichne die Teildreiecke mit $\Delta_0, \Delta_2, \Delta_{00}, \Delta_{02}, \Delta_{20}$ etc
Definiere $\gamma : C \to \Delta$, $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} \mapsto \Delta_{x_1} \cap \Delta_{x_1 x_2} \cap ...$
$\gamma$ ist wohldefiniert.
*Behauptung:* $\gamma$ ist stetig.
Seien $x, y \in C$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow$ Zifferndarstellung von $x, y$ stimmen die ersten $N$ Ziffern überein mit $N = \lfloor \log_3(\frac{1}{\delta}) \rfloor$, andernfalls (Lemma) $|x-y| \geq 3^{-N} \geq 3^{-\log_3(\frac{1}{\delta})} = \delta$ ↯
Es gilt dann diam$\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^N \Rightarrow |\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\lfloor \log_3(\frac{1}{\delta}) \rfloor} \leq C \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\log_3(\frac{1}{\delta})}$
$= C\delta^{\log_3(\frac{2}{\sqrt{3}})} = C\delta^\alpha$ mit $\alpha > 0$
$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha$ mit $\alpha = \log_3(\frac{2}{\sqrt{3}}) > 0$, also ist $\gamma$ Hölderstetig

Setze fort zu $\gamma : [0,1] \to \Delta$ stetig und surjektiv (genauer: $\gamma(C)$ schon surjektiv)
$\gamma$ nicht injektiv
Peano 1890: Dimension wohldefiniert?

# 6 Homotope Abbildungen

**Definition 6.1** Seien $X, Y$ topologische Räume. Zwei stetige Abbildunge $f_0, f_1 : X \to Y$ heißen *homotop* ($f_0 \simeq f_1$), wenn es eine stetige Abbildung $f : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $f(\cdot, 0) = f_0$ und $f(\cdot, 1) = f_1$

**Bemerkung** Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $C^0(X, Y)$:
$f_0 \simeq f_0 : f(\cdot, t) = f_0 \forall t \in [0,1]$
$f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_1 \simeq f_0$ : Sei $f : X \times [0,1] \to Y$ stetig mit $f(\cdot, 0) = f_0, f(\cdot, 1) = f_1$. Setze $\overline{f} : X \times [0,1] \to Y, \overline{f}(\cdot, t) = f(\cdot, 1-t)$
Transitivität: $f : X \times [0,1] \to Y$ stetig mit $f(\cdot, 0) = f_0, f(\cdot, 1) = f_1$, $g : X \times [0,1] \to Y$ stetig mit $g(\cdot, 0) = f_1, g(\cdot, 1) = f_2$. Definiere $h : X \times [0,1] \to Y$ mit
$$h(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen, $[X, Y] = C^0(X, Y)/\simeq$

**Lemma 6.1** Seien $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$ stetig mit $f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1$. Dann gilt:
$g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Insbesondere $X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{Z}$:

$$\begin{aligned} [Y, Z] \times [X, Y] &\to [X, Z] \\ [g] \qquad [f] &\mapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert

*Beweis:*Zugehörige Homotopien:
$f : X \times [0, 1] \to Y, f(\cdot, 0) = f_0, f(\cdot, 1) = f_1$
$g : Y \times [0, 1] \to Z, g(\cdot, 0) = g_0, g(\cdot, 1) = g_1$
Definiere Homotopie durch Verkettung:
$h : X \times [0, 1] \to Z, h(x, t) = g(f(x, t), t)$
$h = g \circ (f \times pr_2)$. $h$ stetig, $h(\cdot, 0) = g_0 \circ f_0, h(\cdot, 1) = g_1 \circ f_1$

□

**Definition 6.2**

1. Ist $f : X \to Y$ homotop zu konstanter Abbildung, so nennt man $f$ *nullhomotop*
2. $X$ heißt *zusammenziehbar*, wenn $id : X \to X$ nullhomotop ist

**Beispiel 6.1** $M \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig, dann ist $M$ zusammenziehbar: $F : M \times [0, 1] \to M, F(x, t) = (1 - t)x + tx_0$

Wie interessieren uns jetzt für $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

**Lemma 6.2** Sei $I = [a, b]$ und $f \in C^0(I, \mathbb{S}^1)$. Dann gibt es ein $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(t) = e^{i\varphi(t)}$ ($\varphi$ *lift* von $f$) für alle $t \in \mathbb{R}$. $\varphi$ ist eindeutig bis auf Addition einer Konstanten in $2\pi\mathbb{Z}$

*Beweis: Eindeutigkeit:* Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0(I, \mathbb{R})$ lifts von $f$. Bilde $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
$e^{i\varphi(t)} = \frac{e^{i\varphi_1(t)}}{e^{i\varphi_2(t)}} = 1$ für alle $t$
$\Rightarrow \varphi : I \to 2\pi\mathbb{Z}$. Da $\varphi$ stetig ist $\varphi$ konstant (da $2\pi\mathbb{Z}$ diskret)
*Existenz:* Setze $S^1_+ = \left\{z = x + iy \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\right\}$. Definiere $arg : S^1_+ \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
$arg(z) = \arcsin(y)$
$arg$ ist stetig als Verkettung von $S^1_+ \to (-1, 1), (x, y) \mapsto y$ und $(-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y \mapsto \arcsin(y)$

$z \in S^1_+ \Rightarrow e^{i\,arg(z)} = \cos(\arcsin(y)) + i\sin(\arcsin(y)) = +\sqrt{1-y^2} + iy = x + iy = z$
$\Rightarrow e^{i\,arg(z)} = z$ auf $S^1_+$
Wähle Unterteilung $a = t_0, t_1, ..., t_N = b$ mit $\frac{f(t)}{f(t_k)} \in S^1_+$ für $t \in [t_{k-1}, t_k]$.
Wähle weiter $\alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $f(t_k) = e^{i\alpha_k}$ für $k = 1, ..., N$
Definiere $\varphi_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}, \varphi_k(t) = arg\left(\frac{f(t)}{f(t_k)}\right) + \alpha_k$. Die $\varphi_k$ sind stetig auf $[t_{k-1}, t_k]$ und wir berechnen $e^{i\varphi_k(t)} = e^{i\,(arg(\frac{f(t)}{f(t_k)})+\alpha_k)} = \frac{f(t)}{f(t_k)} e^{i\alpha_k} = f(t)$
$e^{i\varphi_k(t_k)} = f(t_k) = e^{i\varphi_{k+1}(t_k)}$. Es gibt $\beta_k \in 2\pi\mathbb{Z}$ so dass die Funktion
$\varphi : I \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \varphi_k(t) + \beta_k$ für $k = 1, ..., N$ stetig ist und $e^{i\varphi(t)} = f(t)$ auf $[a, b]$

□

**Satz 6.1** Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, dann gibt es $\varphi \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, so dass $f(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$ für $t \in [0, 2\pi]$
$\varphi$ eindeutig bis auf Addition einer Konstanten in $2\pi\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $\deg(f) = \frac{\varphi(2\pi)-\varphi(0)}{2\pi}$ wohldefiniert und in $\mathbb{Z}$

*Beweis:*Existenz von $\varphi \in C^0([0, 2\pi))$ und Eindeutigkeit bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ folgt direkt aus Lemma 6.2.
$e^{i\varphi(2\pi)} = f(e^{2\pi i}) = f(e^{i0}) = e^{i\varphi(0)} \Rightarrow \varphi(2\pi) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \deg(f) \in \mathbb{Z}$

□

**Beispiel 6.2** Betrachte für $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $f_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, f_k(z) = z^k$
$f_k(e^{it}) = (e^{it})^k = e^{ikt} \Rightarrow \varphi_k(t) = kt$ ist lift von $f_k$
$\deg(f_k) = \frac{k2\pi - k0}{2\pi} = k$

**Lemma 6.3** Sei $f : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{S}^1$ stetig. Für ein $t_0 \in [a, b]$ gelte mit $\varphi_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig: $f(s, t_0) = e^{i\varphi_0(s)} \forall s \in [0, 1]$
Dann gibt es genau ein $\varphi : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit
$f(s, t) = e^{i\varphi(s,t)} \forall (s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$
$\varphi(s, t_0) = \varphi_0(s) \forall s \in [0, 1]$

*Beweis:*kP

□

**Satz 6.2** Sind $F_0, F_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ homotop, so folgt $\deg F_0 = \deg F_1$

*Beweis:* $f_\nu : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1 = F_\nu(e^{it})$. $f_0$ und $f_1$ sind homotop, also gibt es $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ stetig, $f(\cdot, 0) = f_0, f(\cdot, 1) = f_1$

$f(t,\lambda) = F(e^{it},\lambda)$ ($F$ homotopie)
Nach Lemma 6.1 existiert stetiger Lift $\varphi : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t,\lambda) = e^{i\varphi(t,\lambda)}$
$\deg f(\cdot,\lambda) = \frac{\varphi(2\pi,\lambda)-\varphi(0,\lambda)}{2\pi}$ =stetige Funktion in $\lambda$ ganzzahlig
$\Rightarrow \deg f_0 = \deg f_1$

$\square$

**Folgerung 6.1** Die Abbildungen $f_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, f_k(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind nicht homotop für $k \neq \ell$, also ist $\mathbb{S}^1$ nicht zusammenziehbar

**Folgerung 6.2** Es gibt keine stetige Abbildung $f : \overline{B} \to \mathbb{S}^1$ mit $f|_{\partial B} = id_{\partial B}$ (hier: $B = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\right\}$

*Beweis:* Andernfalls definiere Homotopie $h : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1, h(z,t) = f(z)$
$h(z,0) = f(0) \in \mathbb{S}^1$ konstant, $h(z,1) = f(z) = z \forall z \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow id_{\partial B}$ homotop zu konstanter Abbildung $\lightning$

$\square$

**Folgerung 6.3 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** Sei $B = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\right\}$ Jede stetige Abbildung $f : \overline{B} \to \overline{B}$ hat einen Fixpunkt $z$

*Beweis:* Falls nicht, konstruiere Retraktion $x + \lambda(x - f(x)) \in \mathbb{S}^1$, $\lambda^2 |x - f(x)|^2 + 2\lambda\langle x - f(x), x\rangle + |x|^2 \overset{!}{=} 1$
$\Rightarrow \lambda_+(x) = ... > 0$

$\square$

**Satz 6.3 (Borsuk-Ulam)** Ist $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, so gibt es ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(-x) = f(x)$

*Beweis:* Falls nicht, $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1, \tilde{(f)}(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$
$\Rightarrow g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, g(z) = \tilde{f}(z,0)$ ist nullhomotop, denn betrachte $G : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1, G(z,\lambda) = \tilde{f}(\sqrt{1-\lambda^2}z, \lambda)$
$G(z,0) = \tilde{f}(z,0) = g(z), G(z,1) = \tilde{f}(0,1)$ =konst
Sei $\varphi \in C^0([0,2\pi])$ lift von $g$, genauer $g(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$ für alle $t \in [0,2\pi]$
Für $t \in [\pi, 2\pi]$ folgte wegen $g(z) = -g(-z)$: $g(e^{it}) = -g(e^{i(t-\pi)}) = e^{i(\pi+\varphi(t-\pi))}$
$\Rightarrow 2\pi\deg(g) = \varphi(2\pi) - \varphi(\pi) + \varphi(\pi) - \varphi(0) = 2(\varphi(\pi) - \varphi(0))$
Aber $e^{i(\varphi(\pi)-\varphi(0))} = -1 \Rightarrow \varphi(\pi) - \varphi(0) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \deg(g) \in 1 + 2\mathbb{Z}$ - Insbesondere $\neq 0 \lightning$

$\square$

**Folgerung 6.4** Ist $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit $A_k$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Mindestens ein $A_k$ enthält ein Antipodenpunktpaar

*Beweis:*Sei $d_k : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}, d_k(x) = \inf\limits_{y \in A_k} |x-y|$. Setzen $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = (d_1(x), d_2(x))$ stetig
Satz 6.3 $\Rightarrow$ es gibt $x \in \mathbb{S}^2$ mit $d_1(x) = d_1(-x)$ und $d_2(x) = d_2(-x)$
Fall 1: $d_k(x) = 0 \Rightarrow d_k(-x) = 0 \Rightarrow \{x, -x\} \subset A_k$
Fall 2: $d_k(x) > 0$ für $k = 1,2 \Rightarrow d_k(-x) > 0$ für $k = 1,2 \Rightarrow \{x, -x\} \subset A_3$

□

**Satz 6.4** Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sind genau dann homotop, wenn $\deg(f_0) = \deg(f_1)$

*Beweis:*$\Rightarrow$ Satz 6.2
$\Leftarrow$ Sei $\deg(f_0) = \deg(f_1) = k \in \mathbb{Z}$
oBdA $f_0(1) = f_1(1) = 1 \in \mathbb{S}^1$, sonst betrachte $e^{i\alpha_\nu} f_\nu(\nu - 0,1)$ mit $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$ geeignet.
Die Abbildungen $f_\nu$ und $e^{-i\alpha_\nu} f_\nu$ sind homotop via $e^{i\lambda} f_\nu$
Seien $f_\nu \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ die Lifts von $f_\nu$
$f_\nu(e^{it}) = e^{i\varphi_\nu(t)}$ und $\varphi_\nu(0) = 0$
Aus Vorraussetzung folgt: $\frac{1}{2\pi}\varphi_\nu(2\pi) = \frac{\varphi_\nu(2\pi) - \varphi_\nu(0)}{2\pi} = \deg(f_\nu) = k$
Definiere Homotopie $f : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1,\ f(t, \lambda) = e^{i((1-\lambda)\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t))}$
$f(t, 0) = f_0(e^{it}),\ f(t, 1) = f_1(e^{it})\ f(0, \lambda) = 1 = e^{i2\pi k} = f(2\pi, \lambda)$
Definiere schließlich Homotopie $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1, \tilde{f}(e^{it}, \lambda) = f(t, \lambda)$ mit $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0,1]$
$\tilde{f}$ wohldefiniert, denn $f(0, \lambda) = f(2\pi, \lambda) = 1$
$\tilde{f}$ ist stetig: setze $f$ dazu $2\pi$-periodisch auf $\mathbb{R} \times [0,1]$ fort - Fortsetzung stetig.
Es gilt $\tilde{f}(e^{it}, \lambda) = f(t, \lambda)$ für alle $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times [0,1]$
$\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{it}$ ist lokal homöomorph. Da $f$ stetig ist dann auch $\tilde{f}$ stetig

□

**Definition 6.3** Sei $f : X \to Y$ stetig

1. $g : Y \to X$ heißt *Homotopieinverses* von $f$, fall $g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y$
2. Besitzt $f : X \to Y$ ein Homotopieinverses, so heißt $f$ *Homotopieäquivalenz*, $X, Y$ heißen *vom gleichen Homotopietyp*

**Definition 6.4** Sei $X$ topologischer Raum

1. Eine *Retraktion* von $X$ auf $A \subset X$ ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = id_A$

2. $r$ heißt *Deformationsretraktion*, falls mit der Inklusion $i_A : A \to X$ gilt: $i_A \circ r \simeq_A id_X$. $A$ heißt *Defomrationsretrakt* von $X$

**Begriff der relativen Homotopie** Sinf $f, g : X \to Y$ stetig mit $f\mid_A = g\mid_A$ für $A \subset X$
$f \simeq g$ bedeutet: es gibt $F : X \times [0,1] \to Y$ mit
$$\begin{cases} F(\cdot, 0) = f,\ F(\cdot, 1) = g \\ F(\cdot, \lambda)\mid_A = f\mid_A = g\mid_A\ \forall \lambda \in [0,1] \end{cases}$$

**Beispiel 6.3** $M$ sternförmig bzgl $x_0 \in M$
$r : M \to \{x_0\}, r(x) = x_0 \forall x \in M$ ist Deformationsretraktion

**Beispiel 6.4** $r : \overline{B^n} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}, r(x) = \frac{x}{|x|}$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ ist Deformationsretraktion

# 7 Die Fundamentalgruppe

$X$ topologischer Raum, $I = [0,1]$

**Definition 7.1** Sei $u, v \in C^0(I, X)$ mit $v(0) = u(1)$. Definiere $u * v, u^{-1} \in C^0(I, X)$ durch
$$(u * v)(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$u^{-1}(t) = u(1-t), 0 \leq t \leq 1$
$u$ heißt *Schleife mit Basispunkt* $x_0 \in X$, falls $u(0) = u(1) = x_0$

**Definition 7.2** $u, v$ heißen *homotop* (mit festen Endpunkten $x_0, x_1$) wenn $u \simeq_{\{0,1\}} v$, d.h. es gibt $f : I \times [0,1] \to X$ mit
$f(\cdot, 0) = u, f(\cdot, 1) = v$
$f(0, \lambda) = x_0, f(1, \lambda) = x_1$

**Lemma 7.1** Aus $u \simeq u', v \simeq v'$ folgt $u * v \simeq u' * v'$, $u^{-1} \simeq (u')^{-1}$

*Beweis:* Sei $f$ Homotopie zwischen $u, u'$, $g$ Homotopie zwischen $v, v'$
Definiere $h(t, \lambda) = \begin{cases} f(2t, \lambda) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1, \lambda) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ benötigt $f(1, \lambda) = g(0, \lambda)$, gilt für Homotopien mit festen Endpunkten
Für zweite Aussage wähle Homotopie $f^*(t, \lambda) = f(1-t, \lambda)$

□

**Bezeichnungen**

- $\pi_1(X, x_0)$ Menge der Homotopieklassen (relativ $\{0,1\}$) von Schleifen mit Basispunkt $x_0$
- Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig, also $f(x_0) = y_0$
$\Rightarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), [u] \mapsto [f \circ u]$, wohldefiniert nach Lemma 6.1 $f_*$ induzierte Abbildung

**Satz 7.1 (Fundamentalgruppe)**

1. Auf $\pi_1(X, x_0)$ definiert $[u] \cdot [v] = [u * v]$ eine Gruppenstruktur mit neutralem Element $[u(t) \equiv x_0]$ und inversem Element $[u^{-1}]$
2. $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist Gruppenhomomorphismus

*Beweis von 1:* Wohldefiniertheit von $[u] \cdot [v]$ gilt nach Lemma 7.1
Assoziativität: $u * (v * w) \simeq (u * v) * w$ (ab jetzt $\simeq = \simeq_{\{0,1\}}$)
Neutrales Element: $e = [\gamma_{x_0}]$ mit $\gamma_{x_0}(t) = x_0 \forall t \in [0, 1]$
Inverses Element: $u * u^{-1} = e$

□

*Beweis von 2:* $f_*([u] \cdot [v]) = f_*([u * v]) = [f \circ (u * v)]$

$$f \circ (u * v)(t) = \begin{cases} (f \circ u)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \circ v)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = ((f \circ u) * (f \circ v))(t) = [f \circ u][f \circ v]$$

□

**Folgerung 7.1 (Eigenschaften von $f_*$)**

1. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
2. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, falls $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$
3. $f \simeq_{x_0} g \Rightarrow f_* = g_*$

*Beweis:* 1,2 gelten nach Definition
3: Sei $h : X \times [0, 1] \to Y$ Homotopie zwischen $f$ und $g$
nach Vorraussetzung $h(x_0, \lambda) = y_0$ für alle $\lambda \in [0, 1]$
Sei $u : [0, 1] \to X$ schleife ind $X$ mit Basispunkt $x_0$, $f_*[u] = [f \circ u] = [h(\cdot, 0) \circ u] = [h(\cdot, 1) \circ u] = [g \circ u] = g_*[u]$

□

Wie hängt $\pi_1(X, x_o)$ vom Basispunkt ab?

**Satz 7.2** Seien $x_0, y_0 \in X$. Jede Homotopieklasse $\alpha$ von Wegen von $x_0$ nach $y_0$ induziert einen Isomorphismus

$$\varphi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \overset{\sim}{\to} \pi_1(X, y_0)$$

*Beweis:* Sei $u_0 : [0,1] \to X$ Weg von $x_0$ nach $y_0$ mit $[u_0] = \alpha$
Betrachte $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0), \varphi([u]) = [u_0^{-1} * u * u_0]$. $\varphi_\alpha$ ist wohldefiniert (hängt nicht von Wahl von $u_0 \in \alpha, u \in [u]$ ab)
Weiter ist $\varphi_\alpha$ Gruppenhomomorphismus: $\varphi_\alpha([u][v]) = \varphi_\alpha([u * v]) = [u_0^{-1} * (u * v) * u_0] = [(u_0^{-1} * u * a_0) * (a_0^{-1} * v * u_0)] = \varphi_\alpha(u)\varphi_\alpha(v)$
Schließlich: $u_0^{-1}$ induziert den inversen Homomorphismus: $(\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha)[u] = [u]$

□

**Bemerkung** Sei $u_1 : [0,1] \to X$ ebenfalls Weg von $x_0$ nach $y_0$. Dann folgt für $[u] \in \pi_1(X, x_0)$:
$\varphi_\beta([u]) = [u_1^{-1} * u * u_1] = [u_1^{-1} * (u_0 * u_0^{-1}) * u * (u_0 * u_0^{-1}) * u_1] = [(u_0^{-1} * u_1)^{-1}] * [u_0^{-1} * u * u_0] * [u_0^{-1} * u_1] = [u_0^{-1} * u_1]^{-1} \varphi_\alpha([u])[u_0^{-1} * u_1]$ mit $[u_0^{-1} * u_1] \in \pi_1(X, y_0)$
Somit ist $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ eindeutig bestimmt bis auf einen inneren Automorphismus der Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$, der dahinter geschaltet werden kann

**Lemma 7.2** Seien $f, g : X \to Y$ stetig und homotop und $f(x_0) = y_0, g(x_0) = z_0$. Dann existiert ein Weg $u : [0,1] \to Y$ von $y_0$ nach $z_0$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, y_0) \arrow[dd, "\varphi_{[u]}"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, z_0)
\end{tikzcd}$$

*Beweis:* Sei $h : X \times [0,1] \to Y$ Homotopie von $f$ nach $g$, insbesondere $h(x_0, 0) = f(x_0) = y_0, h(x_0, 1) = g(x_0) = z_0$. Wähle $u : [0,1] \to Y, u(\lambda) = h(x_0, \lambda)$
ZZ $u^{-1} * (f \circ \gamma) * u \simeq_{\{0,1\}} g \circ \gamma$

□

**Satz 7.3** Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen

*Beweis:* $f : X \to Y$ Homotopieäquivalent, $g : Y \to X$ Homotopieinverses
$(x, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, z_0),\ g \circ f \simeq id_X$
$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, z_0) \overset{\varphi_{[u]}}{\cong} \pi_1(X, x_0), u : [0,1] \to X$ Weg von $x_0$ nach $z_0$

Es folgt $g_* \circ f_* = \varphi_{[u]}^{-1}$, also $g_*$ surjektiv, $f_*$ injektiv. Vertauschen der Rolle von $f, g$ liefert $f_*, g_*$ isomorph

□

**Folgerung 7.2** Ist $X$ homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum, so gilt $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$

**Beispiel 7.1** $M \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig $\Rightarrow \pi_1(M, x_0) = \{e\}$
$X$ zusammenziehbar $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}$

**Terminologie** $\pi_0(X)$ =Menge der Wegkomponenten von $X$

$$X \text{ einfach zusammenhängend} \Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ wegzusammenhängend} \\ \pi_1(X, x_0) = \{e\} \end{cases}$$

**Satz 7.4** deg: $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{Z}, +)$ ist Gruppenisomorphismus

*Beweis:* Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1 \in \mathbb{S}^1$
Weiter sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ Lift von $\gamma$ mit $\gamma(0) = 0$,$\gamma(t) = e^{i\varphi(t)}, t \in [0,1]$
Windungszahl von $\gamma$ deg$\gamma = \frac{1}{2\pi}\varphi(1) \in \mathbb{Z}$ (vgl. Lemma 6.2), damit ist deg wohldefiniert
Sei $\varphi_\nu$ Lift von $\gamma_\nu$ mit $\varphi_\nu(0) = 0$. Erhalte Lift von $\gamma_0 * \gamma_1$ durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_1(2t-1) + 2\pi \deg\varphi_0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$deg$(\gamma_0 * \gamma_1)$ =deg$\gamma_0$+deg$\gamma_1$
deg surjektiv: $\gamma_k(t) = (e^{2\pi i t})^k$ mit $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$deg$([\gamma_k]) = k$
injektiv nach Satz 6.4

□

**Bemerkung** Im allgemeinen $\pi_1(X, x_0)$ nicht abelsch

**Satz 7.5** Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte topologische Räume und $\pi_X, \pi_Y$ Projektionen von $X \times Y$, dann ist die Abbildung
$(\pi_X)_* \times (\pi_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus
*Erläuterung:* $G, H$ Gruppen. Direktes Produkt $G \times H = \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$, $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Das ist Gruppe mit Einselement $(e_G, e_H)$, inversem Element $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$

*Beweis:* $(\pi_X)_*, (\pi_Y)_*$ sind Gruppenhomomorphismen $\Rightarrow (\pi_X)_* \times (\pi_Y)_*$ ist Gruppenhomomorphismus

$\mathbb{Z}$ bijektiv:
Surjektiv: Sei $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0), [\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$, setze $\alpha \times \beta : [0,1] \to X \times Y, (\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$
$\Rightarrow \pi_X \circ (\alpha \times \beta) = \alpha, \pi_Y \circ (\alpha \times \beta) = \beta \Rightarrow ((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*)[\alpha \times \beta] = ([\alpha], [\beta])$
Injektiv: Sei $\gamma \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit $(\pi_X)_*[\gamma] = e_{\pi_1(X,x_0)}, (\pi_Y)_*[\gamma] = e_{\pi_1(Y,y_0)}$
$\Rightarrow \pi_X \circ \gamma, \pi_Y \circ \gamma$ sind Nullhomotopo mit Endpunkten $x_0, y_0$. Wähle zugehörige Homotopien $h_1, h_2$, definiere Homotopie $h = h_1 \times h_2$

$\square$

**Beispiel 7.2** $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,1)) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, [\gamma] \mapsto (\deg(\pi_1 \circ \gamma), \deg(\pi_2 \circ \gamma))$ ist Isomorphismus

**Satz 7.6** Sei $X$ topologischer Raum. Es gelte:

1. $X = U \cup V$ mit $U, V \subset X$ offen, einfach zusammenhängend
2. $U \cap V$ ist wegzusammenhängend

$\Rightarrow X$ ist einfach zusammenhängend

**Folgerung 7.3** $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend für $n \geq 2$

**Bemerkung** Der Satz von Seifert und von Kampen berechnet allgemeiner $\pi_1(X, x_0)$ aus $\pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_0)$ und $\pi_1(U \cap V, x_0)$ ($x_0 \in U \cap V$). Hier: Spezialfall

*Beweis:* Wähle Basispunkt $x_0 \in U \cap V$. Wir zeigen, dass jede Schleifen in $X$ als Produkt von Schleifen geschrieben werden kann, die ganz in $U$ oder $V$ liegen (bis auf Homotopie)
Für $\alpha \in C^0(I, X), \alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ existiert eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$, so dass $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ in $U$ liegt für $i$ gerade und in $V$ für $i$ ungerade (evtl vertausche $U, V$)
dazu: $\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)$ ist offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$.
$\exists$ Lebesguezahl $\delta > 0 : |t_1 t_2| < \delta \Rightarrow \alpha([t_1, t_2]) \subset U$ oder $\alpha([t_1, t_2]) \subset V$
Erhalte $\alpha_i$ durch Deparametrisierung von $\alpha \mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ auf das Intervall $[0,1]$.
Wähle Weg $\gamma_i : [0,1] \to U \cap V$ mit $\gamma_i(0) = \alpha_i(1), \gamma_i(1) = x_0$
Es folgt: $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1 * ... * \alpha_N \simeq_{\{0,1\}} \underbrace{\alpha_1 * \gamma_1}_{\in U} * \underbrace{\gamma_1^{-1} * \alpha_2 * \gamma_2}_{\in V} * ... * \underbrace{\gamma_{N-1}^{-1} * \alpha_N}$

$\square$

# 8 Überlagerungstheorie

**Spezialfall** $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{it}$, Alle Räume wegzusammenhängend

**Definition 8.1** Sei $X$ wegzusammenhängender topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $p : Y \to X$ heißt *Überlagerung (covering)*, wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U$ existiert so dass gilt:

- $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ mit $V_i$ offen, paarweise disjunkt
- $p\,|_{V_i} : V_i \to U$ Homeomorphismus $\forall i \in I$

$p$ lokal homeomorph $\Rightarrow$ offen

**Terminologie** $X$ Basis der Überlagerung, $U$ Umgebung mit Überlagerungseigenschaft, $p$ Projektion, $x = p(y)$ "$y$ liegt über $x$"

**Beispiel 8.1**

a) $id : X \to X$

b) $E : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{it}$, sei $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$. Wähle $U = \left\{e^{i\varphi} \mid |\varphi - \theta| < \pi\right\}$, $E^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (\theta - \pi, \theta + \pi) + 2\pi k$

c) $\mathbb{C} \xrightarrow{exp} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Überlagerung

d) $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, p(z) = z^k$

e) $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$

**Lemma 8.1** Sei $p : Y \to X$ Überlagerung. Dann sind die Fasern $p^{-1}(\{x\}) \subset Y$ diskret und die Mächtigkeit von $p^{-1}(\{x\})$ ist konstant ("*Blätterzahl der Überlagerung*")

*Beweis:* Sei $U$ offene Umgebung von $x$ mit Überlagerungseigenschaft, $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ disjunkt
Sei $y \in p^{-1}(\{x\})$, etwa $y \in V_{i_0}$
$\Rightarrow p^{-1}(\{x\}) \cap V_{i_0} = \{y\}$, da $p\,|_{V_{i_0}} : V_{i_0} \to U$ bijektiv
$\Rightarrow \{y\}$ offene Teilmenge von $p^{-1}(\{x\})$ bzgl Relativtopologie $\Rightarrow$ Fasern sind diskret
Sei $x_0 \in C$ fest. Definiere: $X_0 = \left\{x \in X \mid p^{-1}(\{x\}) \text{ gleichmächtig } p^{-1}(\{x_0\})\right\}$
$\Rightarrow X_0 \neq \emptyset$, da $x_0 \in X_0$. $X_0$ offen: zu $x \in X_0$ wähle offene Umgebung $U$ mit Überlagerungseigenschaft.
$p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} V_i,\ p\,|_{V_i} : V_i \to U$ homöomorph

Zu $x' \in U$ gibt es genau ein $y_i' \in V_i$ mit $p(y_i') = x$
$\Rightarrow p^{-1}(\{x'\})$ gleichmächtig zu $p^{-1}(\{x\})$ zu $p^{-1}(\{x_0\}) \Rightarrow x' \in X_0 \Rightarrow U \subset X_0 \Rightarrow$ offen
$X \setminus X_0$ ist auch offen: gleiches Argument. Da $X$ zusammenhängend folgt $X = X_0$

□

**Satz 8.1 (Wege-Liftungssatz)** Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ Überlagerung. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Zu jedem $u \in C^0([0,1], X)$ mit $u(0) = x_0$ gibt es genau ein $\tilde{u} \in C^0([0,1], \tilde{X})$ mit $p \circ \tilde{u} = u, \tilde{u}(0) = \tilde{x}_0$

**Bemerkung** Der Lift einer Schleife muss keine Schleife sein

*Beweis:* $I = [0,1]$
Eindeutigkeit: Seien $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in C^0(I, \tilde{X})$ mit $p \circ \tilde{u}_1 = p \circ \tilde{u}_2 = u$
Betrachte $M = \{t \in I \mid \tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t)\}$. $M$ ist abgeschlossene Teilmenge von $I$ (da $\tilde{u}_\nu$ stetig)
Zu $t_0 \in M$ wähle Umgebung $U \subset X$ mit Überlagerungseigenschaft, $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i, p\,|_{V_i}\colon V_i \to U$ homöomorph
Sei $i \in I$ mit $\tilde{u}_1(t_0) = \tilde{u}_2(t_0) \in V_i \Rightarrow \tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t) \in V_i$ für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$
Da $p(\tilde{u}_1(t)) = p(\tilde{u}_2(t)) = u(t) \Rightarrow \tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t),\ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$
$\Rightarrow M$ relativ offen in $I \Rightarrow M = \emptyset$ oder $M = I$

Existenz: Wähle Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$ so dass $u([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$, wobei $U_i$ Umgebung mit Überlagerungseigenschaft
Sei $P\,|_{V_1}\colon V_1 \to U_1$ homöomorph mit $\tilde{x}_0 \in V_1$. Setze dann $\tilde{u}\,|_{[t_0,t_1]} = (p\,|_{V_1})^{-1} \circ u\,|_{[t_0,t_1]}$
Sei weiter $p\,|_{V_i}\colon V_i \to U_i$ homöomorph mit $\tilde{u}(t_{i-1}) \in V_i$ für $i = 2, ..., N$. Setze $\tilde{u}\,|_{[t_{i-1},t_i]} = (p\,|_{V_i})^{-1} \circ u\,|_{[t_{i-1},t_i]}$ für $i \leq 2$
Lifteigenschaft von $\tilde{u}$ klar aus Definition. An den Stellen $t_{i-1}, i = 2, ..., N$ ist $\tilde{u}$ stetig.

□

**Satz 8.2 (Homotopieliftungssatz)** Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ Überdeckung und $u, v \in C^0([0,1], X)$ seien homotop mit festen Endpunkten $x_0, y_0$. Dann sind die Lifts $\tilde{u}, \tilde{v}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ ebenfalls homotop mit festen Endpunkten, insbesondere $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1)$

*Beweis:* Ansatz: Durch Liften der gegebenen Homotopie.
Sei $F : I \times I \to X, F = F(t, \lambda)$ Homotopie relativ $\{0, 1\}$.
$F(\cdot, 0) = u, F(0, \cdot) = x_0, F(\cdot, 1) = v, F(1, \cdot) = y_0$
Wir konstruieren Homotopie $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ stetig mit $p \circ \tilde{F} = F, \tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$
Falls geschafft folgt wegen der Eindeutigkeit des Lifts: $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{u}, \tilde{F}(0, \cdot) =$

$\tilde{x}_0$
$\Rightarrow \tilde{F}(\cdot,1) = \tilde{v}, \tilde{F}(1,\cdot) = \tilde{u}(1)$
Insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{u}(1)$. Zur Konstruktion von $\tilde{F}$ wähle Unterteilungen $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1, 0 = \lambda_0 < ... < \lambda_N = 1$, so dass $F(Q_{ij}) \subset U_{ij}$ mit $Q_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ und $U_{ij}$ Umgebung mit Überlagerungseigenschaft.
Zunächst wähle $V_{11} \xrightarrow{p} U_{11}$ mit $\tilde{x}_0 \in V_{11}$ und setze $\tilde{F}\mid_{Q_{11}} = (p\mid_{V_{11}})^{-1} \circ F\mid_{Q_{11}}$
Um $\tilde{F}$ auf $Q_{k\ell}$ zu definieren, sie $\tilde{F}$ bereits gefunden auf Vereinigung der $Q_{ij}$ mit $i < k$, sowie $i = k, j < \ell$
Wähle $V_{k\ell} \xrightarrow{p} U_{k\ell}$ mit $\tilde{F}((t_{k-1}, \lambda_{\ell-1})) \in V_{k\ell}$
Setze $\tilde{F}\mid_{Q_{k\ell}} = (p\mid_{V_{k\ell}})^{-1} \cdot F\mid_{Q_{k\ell}}$
Dann sind $\tilde{F}(t_{k-1}, \cdot)$ sowie $\tilde{F}(\cdot, \lambda_{\ell-1})$ Lifts von $F$ mit Anfangspunkt $\tilde{F}(t_{k-1}, \lambda_{\ell-1})$, also ist $\tilde{F}$ stetig fortgesetzt und hat Liftungseigenschaft.

□

**Satz 8.3** Sei $p : Y \to X$ Überlagerung und $x_0 \in X$

1. Für jedes $y_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ ist $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiver Gruppenhomomorphismus. Wir setzen $G(y_0) = p_*(\pi_1(Y, y_0))$
2. Seien $y_0, y_1 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$. Ist $u : [0,1] \to Y$ Weg von $y_0$ nach $y_1$ so gilt mit $[p \circ u] =: \alpha \in \pi_1(X, x_0)$
$G(y_1) = \alpha^{-1} G(y_0) \alpha$
3. Ist $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ so gibt es $y_1 \in p^{-1}(\{x_0\})$ mit $G(y_1) = \alpha^{-1} G(y_0) \alpha$

*Beweis:*(1) Sei $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$ mit $p \circ u \simeq$ Punktweg $c_{x_0}$. Lift von $x_{x_0}$ ist Punktweg $c_{y_0}$
Satz 8.2 $\Rightarrow u$ homotop zu $c_{y_0}$ relativ $\{0,1\}$ (feste Endpunkte) $\Rightarrow [u] = e$ in $\pi_1(Y, y_0)$.

(2) Sei $v$ Schleife in $y_1$. Dann gilt $v \simeq u^{-1} * u * v * u^{-1} * u$ relativ $\{0,1\}$
$\Rightarrow p_*([v]) = [(p \circ u)^{-1} * p \circ (u * v * u^{-1}) * (p \circ u)] = \alpha^{-1} p_*([u * v * u^{-1}])\alpha$
Wähle Schleife $u$ in $x_0$ mit $[u] = \alpha$

(3) $\tilde{u} : [0,1] \to Y$ zugehöriger Lift mit $\tilde{u}(0) = y_0$
Mit $y_1 := \tilde{u}(1)$ folgt $p(y_1) = u(1) = x_0$, mit (2) folgt $G(y_1) = \alpha^{-1} G(y_0) \alpha$

□

**Satz 8.4 (Abbildungsliftungssatz)** Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Für $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig sind folgende Aussagen äquivalent

1. $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = G(\tilde{x}_0)$

2. Es gibt $\tilde{f}(Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = f$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(Y, y_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

**Zusatz** Wenn Lift $\tilde{f}$ existiert, so eindeutig

**Bemerkung** $Y$ einfach zusammenhängend ($\pi_1(Y, y_0) = \{e\}$) $\Rightarrow$Lift existiert immer

*Beweis:*(2) $\Rightarrow$ (1): $p \circ \tilde{f} = f \Rightarrow p_* \circ \tilde{f}_* = f_* \Rightarrow$ (1)
(1) $\Rightarrow$ (2) : Konstruktion von $\tilde{f}$ längs Wegen.
Zu $y \in Y$ wähle Weg $v$ von $y_0$ nach $y$, $u = f \circ v$ Weg in $X$ von $f(y_0) = x_0$ nach $f(y)$
Sei $\tilde{u}$ Lift von $u$ mit $\tilde{u}(0) = \tilde{x}_0$. Setze $\tilde{f}(y) = \tilde{u}(1)$
Sei $v'$ anderer Weg von $y_0$ nach $y_1$. $[u' * u^{-1}] = f_*[v' * v^{-1}] \in G(\tilde{x}_0)$ nach Vorraussetzung
$\Rightarrow \widetilde{u' * u^{-1}}$ ist Schleife in $x_0$
$\Rightarrow \tilde{u}'(t) = (\widetilde{u' * u^{-1}})(\frac{t}{2}), t \in [0, 1]$
$\tilde{u}(t) = (\widetilde{u' * u^{-1}})(1 - \frac{t}{2}), t \in [0, 1]$
$\Rightarrow \tilde{u}'(1) = \widetilde{u' * u^{-1}}(\frac{1}{2}) = \tilde{u}(1)$
Damit $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ wohldefiniert mit $p \circ \tilde{f} = f$
Steigkeit von $\tilde{f}$. Ziel: Stetigkeit in $y_1 \in Y$
Setze $x_1 = f(y_1) \in X, \tilde{x}_1 = \tilde{f}(y_1) \in \tilde{X}$
Wähle Umgebung $U$ von $x_1$ mit Überlagerungseigenschaft. Es gibt Umgebung $W$ von $\tilde{x}_1$ mit $p : W \stackrel{\approx}{\to} U$
Sei $V$ Umgebung von $y_1$ mit $f(Y) \subset U$ und $V$ wegweise zusammenhängend
Nach Konstruktion gilt: $\tilde{f} = (p\mid_W)^{-1} \circ f$ auf $V \Rightarrow \tilde{f}$ stetig
Zur Eindeutigkeit von $\tilde{f}$: Sei $v$ Weg von $y_0$ nach $y \Rightarrow \tilde{f}(v(t))$ Lift von $f(v(t))$ mit $\tilde{f}(v(0)) = \tilde{x}_0$ (denn $p(\tilde{f}(v(t))) = f(v(t))$ )
Eindeutigkeit des Lifts (Satz 8.1) liefert $\tilde{f}(v(t))$ eindeutig, insbesondere $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(v(1))$

□

**Definition 8.2** Seien $p_i : (Y_i, y_i) \to (X, x_0)$ Überlagerungen.

a) $f : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ heißt *Überlagerungsmorphismus* falls $p_2 \circ f = p_1$

b) $f$ *Überlagerungsisomorphismus*, falls $f$ bijektiv und $f, f^{-1}$ Überlagerungsmorphismen

c) *Decktransformation (covering transformation)* falls $f : Y \to Y$ Überlagerungsautomorphismus

**Bemerkung** Menge der Decktransformationen einer Überlagerung ist Gruppe

**Beispiel 8.2** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, p(t) = e^{it}, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Decktransformation (stetig) $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ : $\phi(t) = t + 2\pi k$

**Folgerung 8.1** Gegeben seien Überlagerungen $p_i : (Y_1, y_i) \to (X, x_0)$ für $i = 1, 2$. Äquivalent sind:

1. $G(y_1) \subset G(y_2)$
2. Es gibt einen Überlagerungsmorphismus $(Y_1, y_1) \xrightarrow{f} (Y_2, y_2)$. Dieses $f$ ist eindeutig bestimmt

*Beweis:*(2) $\Rightarrow$ (1): $p_2 \circ f = p_1 \Rightarrow (p_1)_* = (p_2)_* \circ f_* \Rightarrow G(y_1) \subset G(y_2)$
(1) $\Rightarrow$ (2) : Abbildungsliftungssatz, Existenz und Eindeutigkeit nach Satz 8.3

□

**Folgerung 8.2** Sei $p : \tilde{X} \to X$ Überlagerung
Sind $y_0, y_1 \in p^{-1}(\{x_0\})$, dann sind äquivalent:

1. $G(y_0) = G(y_1)$
2. $\exists \sigma \in$Deck($p$) mit $\sigma(y_0) = y_1$ eindeutig bestimmt

*Beweis:*(2) $\Rightarrow$ (1) : $G(y_0) = p_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \sigma)(\pi_1(Y, y_0))$ ($\sigma \in$Deck($p$))
$= p_*(\sigma_*(\pi_1(Y, y_0))) = p_*(\pi_1(Y, y_1)) = G(y_1)$
(1) $\Rightarrow$ (2) :

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, y_0) \arrow[rr, shift left, "\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, y_1) \arrow[ll, shift left, "\tau"] \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Nach Folgerung 8.1 existieren Überlagerungsmorphismen $\sigma, \tau$ wie oben

$$\begin{tikzcd}
& (\tilde{X}, y_0) \arrow[dd, "p"] \\
(\tilde{X}, y_0) \arrow[ur, "\tau\circ\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & \\
& (X, x_0)
\end{tikzcd} \quad p \circ (\tau \circ \sigma) = (p \circ \tau) \circ \sigma = p$$

$\tau \circ \sigma$ Lift von $p$ mit $(\tau \circ \sigma)(y_0) = y_0$
Eindeutigkeit in Satz 8.3: $\tau \circ \sigma = id_{\tilde{X}} \Rightarrow \sigma$ Decktransformation

□

**Erinnerung** Sei $G$ eine Gruppe, $H \subset G$. Dann $N(H) = \{\alpha \in G \mid \alpha H \alpha^{-1} = H\}$ Normalisator von $H$

1. $N(H)$ ist Untergruppe von $G$
2. $H$ Untergruppe $\Rightarrow H$ Normalteiler von $N(H)$
3. $N(H)$ ist größte Untergruppe in $G$, in der $H$ Normalteiler ist

**Satz 8.5** Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und $N(\tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ der Normalisator von $G(\tilde{x}_0)$. Dann existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\phi : N(\tilde{x}_0) \to$Deck$(p)$ mit ker$\phi = G(\tilde{x}_0)$

**Spezialfall** $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend, $G(\tilde{x}_0) = \{e\}$ und $N(\tilde{x}_0) = \pi_1(X, x_0)$
Deck$(p) \overset{\sim}{=} \pi_1(X, x_0)$

*Beweis:*

a) Konstruktion von $\phi : N(\tilde{x}_0) \to$Deck$(p)$
Sei $[u] \in N(\tilde{x}_0)$ mit $u$ Schleife in $x_0$. Lifte zu Weg $\tilde{u}$ in $\tilde{X}$ mit $\tilde{u}(0) = \tilde{x}_0$
Setze $\tilde{x}_1 = \tilde{u}(1)$. Es gilt: $G(\tilde{x}_1) = [u]^{-1}G(\tilde{x}_0)[u]$ (Satz 8.3)
$= G(\tilde{x}_0)$, da $[u] \in N(\tilde{x}_0)$.
Folgerung 8.2 $\Rightarrow \exists \sigma \in$Deck$(p)$ mit $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ eindeutig. Setze $\phi([u]) = \sigma$

b) $\phi$ Gruppenhomomorphismus
$\sigma = \phi([u]) : \sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{u}(1), \tau = \phi([v]) : \tau(\tilde{x}_0) = \tilde{v}(1)$
Sei $\rho = \phi([u * v])$, also $\rho(\tilde{x}_0) = u \tilde{*} v(1)$
Zu zeigen: $(\sigma \circ \tau)(\tilde{x}_0) = \rho(\tilde{x}_0)$, dann folgt $\sigma \circ \tau = \rho$ nach Eindeutigkeit Folgerung 8.2
Der Lift von $u * v$ lautet $\begin{cases} \tilde{u}(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \sigma(\tilde{v}(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$
Denn bei $t = \frac{1}{2}$ gilt $\sigma(\tilde{v}(0)) = \sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{u}(1) \Rightarrow$ stetig zusammengesetzt
$\rho(\sigma(\tilde{v}(2t-1))) = \rho(\tilde{v}(2t-1)) = v(2t-1)$✓
$\Rightarrow \rho(\tilde{x}_0) = \sigma(\tilde{v}(1)) = \sigma(\tau(\tilde{x}_0))$

c) $\phi$ ist surjektiv
Sei $\sigma \in$Deck$(p)$ gegeben. Setze $\tilde{x}_1 = \sigma(\tilde{x}_0)$. Sei $\tilde{u}$ Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$, also $u = p \circ \tilde{u}$ Schleife is $x_0 \in X$
Setze $\alpha = [u], G(\tilde{x}_1) = \alpha^{-1}G(\tilde{x}_0)\alpha$ nach Satz 8.3
Nach Folgerung 8.2 gilt aber $G(\tilde{x}_1) = G(\tilde{x}_0)$
$\Rightarrow \alpha \in N(\tilde{x}_0)$, also $\sigma = \phi(\alpha)$ wie verlangt

d) Bestimmung von Ker$\phi$
$\alpha \in G(\tilde{x}_0) \Leftrightarrow \alpha = [p \circ \tilde{u}]$ mit $\tilde{u}$ Schleife in $\tilde{x}_0 : \tilde{u}(1) = \tilde{x}_0$

$\Leftrightarrow \phi(\alpha)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow \phi(\alpha) = id_{\tilde{X}}$ nach Folgerung 8.2
$\Leftrightarrow \alpha \in$Ker$\phi$

□

**Definition 8.3** Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt

a) *universell* $\Leftrightarrow \tilde{X}$ einfach zusammenhängend

b) *regulär* oder *galoissch*, falls für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gilt: $G(\tilde{x})$ ist Normalteiler in $\pi_1(X, x)$, wobei $x = p(\tilde{x})$

**Satz 8.6** Für eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ sind äquivalent:

1) $p$ ist regulär

2) Deck($p$) operiert transitiv auf jeder Faser $p^{-1}(\{x\})$

3) Deck($p$) operiert transitiv auf einer Faser $p^{-1}(\{x_0\})$

*Beweis:*1) $\to$ 2): Seien $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(\{x\})$
$G(\tilde{x}_2) = \alpha^{-1}G(\tilde{x}_1)\alpha$ mit einem $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ (Satz 8.3) $= G(\tilde{x}_1)$ (nach Vorraussetzung)
Folgerung 8.2 $\Rightarrow \exists\sigma \in$Deck($p$) : $\sigma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$
3) $\Rightarrow$ 1): Wir zeigen $G(\tilde{x}_0)$ ist Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, dann folgt 1) aus folgendem Lemma 8.1
Zu $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ wähle ein $\tilde{x}_1$ mit $G(\tilde{x}_1) = \alpha^{-1}G(\tilde{x}_0)\alpha$ (nach Satz 8.3 (3) )
Nach Vorraussetzung gilt $\tilde{x}_1 = \sigma(\tilde{x}_0)$ mit $\sigma \in$Deck($p$) und damit $G(\tilde{x}_1) = G(\tilde{x}_0)$ nach Folgerung 8.2
$\Rightarrow G(\tilde{x}_0) = \alpha^{-1}G(x_0)\alpha \Rightarrow G(\tilde{x}_0)$ ist Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$

□

**Lemma 8.2** Sei $p : \tilde{X} \to X$ Überlagerung. Gilt $(*)$ $G(\tilde{x}_0)$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ mit $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ für ein $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, so ist $p$ regulär, d.h. $(*)$ gilt für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$

*Beweis:* Sei $\gamma$ Weg von $x_0$ nach $x_1$. $\phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \phi_\gamma([u]) = [\gamma^{-1} * u * \gamma]$
$\phi_\gamma$ ist Gruppenhomomorphismus mit $\phi_\gamma^{-1} = \phi_{\gamma^{-1}}$
Sei $\tilde{\gamma}$ Lift von $\gamma$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$. Setze $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1)$, also $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = x_1$
*Behauptung:* $\phi_\gamma(G(\tilde{x}_0)) = G(\tilde{x}_1)$
Denn für $\tilde{u}$ Schleife in $\tilde{x}_0$ und $u = p \circ \tilde{u}$ gilt $\phi_\gamma(\underbrace{[u]}_{\in G(\tilde{x}_0)}) = [\gamma^{-1} * u * \gamma] =$
$[p \circ (\tilde{\gamma}^{-1} * \tilde{u} * \tilde{\gamma})] = p_*[\tilde{\gamma}^{-1} * \tilde{u} * \tilde{\gamma}] \in G(\tilde{x}_1)$

$\Rightarrow \phi_\gamma(G(\tilde{x}_0)) \subset G(\tilde{x}_1)$. Weiter $G(\tilde{x}_0) \supset \phi_{\gamma^{-1}}(G(\tilde{x}_1)) = \phi_\gamma^{-1}(G(\tilde{x}_1))$, also $\phi_\gamma(G(x_0)) \supset G(\tilde{x}_1) \Rightarrow$Behauptung
Sei $\alpha \in \pi_1(X, x_0), \phi_\gamma(\alpha)^{-1}G(\tilde{x}_1)\phi_\gamma(\alpha)$ durchläuft die volle $\pi_1(X, x_1)$
$= \phi_\gamma(\underbrace{\alpha^{-1}G(\tilde{x}_0)}_{=G(\tilde{x}_0)}\alpha) = G(\tilde{x}_1)$

□

**Satz 8.7** Sei $\Gamma$ Untergruppe der Homöomorphismengruppe von $\tilde{X}$ (wegzusammenhängend), die eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann ist $p : \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma$ eine reguläre Überlagerung mit Decktransformationsgruppe Deck$(p) = \Gamma$

**Definition 8.4** Gruppe $\Gamma$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $X \Leftrightarrow \forall x \in X$ gibt es eine Umgebung $U$ mit $U \cap g(u) = \emptyset \forall g \in \Gamma \setminus \{id\}$

(1) Insbesondere operiert $\Gamma$ frei (ohne Fixpunkte) $g(x) \neq x \forall x \in X, g \in \Gamma \setminus \{id\}$

(2) Für $g \neq g'$ gilt mit $U$ Umgebung von $x$ wie in Def. 8.4 $gU \cap g'U = g(U \cap g^{-1}g'U) = \emptyset$

(3) Sei $p : \tilde{X} \to X$ Überlagerung. Dann operiert $\Gamma =$Deck$(p)$ eigentlich diskontinuierlich
Zu $\tilde{x} \in \tilde{X}$ wähle Umgebung $U$ von $x = p(\tilde{x})$ mit Überlagerungseigenschaft:
$p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ disjunkt, $p|_{V_i}\colon V_i \to U$ homeomorph. Dann gilt $V_i \cap \sigma(V_i) = \emptyset$ für alle $\sigma \in$Deck$(p) \setminus \left\{id_{\tilde{X}}\right\}$. Andernfalls gibt es $\tilde{x}_2 \in V_i, \tilde{x}_2 = \sigma(\tilde{x}_1)$ mit $\tilde{x}_1 \in V_i$, $\sigma \neq id_{\tilde{X}}$
$\Rightarrow p(\tilde{x}_2) = p(\sigma(\tilde{x}_1)) = p(\tilde{x}_1) \Rightarrow \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$, da $p|_{V_i}$ injektiv
$\Rightarrow \sigma = id_{\tilde{X}}$ nach Folgerung 8.2 ↯

**Beispiel 8.3** $\Gamma = (\mathbb{R}, +)$, $\Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g, x) \mapsto g + x$
$\Gamma$ operiert *nicht* eigentlich diskontinuierlich: Angenommen es gibt $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \cap (g + (-\delta, \delta)) = \emptyset \forall g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falsch für $|g| < 2\delta$
$\{\pm 1\}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^1, x \mapsto -x$

*Beweis (Satz):*

a) Sei $[\tilde{x}] \in \tilde{X}/\Gamma$. Nach Vorraussetzung existiert Umgebung $V$ von $\tilde{x}$ so dass $V \cap \sigma(V) = \emptyset \forall \sigma \in \Gamma \setminus \left\{id_{\tilde{X}}\right\}$. Dann ist $U := p(V)$ Umgebung mit Überlagerungseigenschaft. Denn $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\sigma \in \Gamma} \sigma(V)$, $p : V \to U$ surjektiv, injektiv, offen $\Rightarrow$ homöomorph

b) $\Gamma$ operiert trainsitiv auf jeder Faser $(= \bigcup\limits_{\sigma \in \Gamma} \{\sigma(x)\}))$
Satz 8.6 $\Rightarrow p$ ist regulär (betrachte $\tilde{X} \setminus \Gamma$ wegzusammenhängend, da $\tilde{X}$ wegzusammenhängend)
Weiter $\Gamma \subset$Deck$(p)$. Da $\Gamma$ transitiv auf den Fasern operiert gilt Deck$(p) = \Gamma$

□

**Satz 8.8** Sei $\tilde{X} \to X$ universelle Überlagerung (d.H. $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend). Ist $Y \xrightarrow{q} X$ beliebige Überlagerung, so existiert Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} Y$, so dass $q \circ \pi = p$

*Beweis:* Da $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$ existiert $\pi : \tilde{X} \to Y$ stetig, so dass $q \circ \pi = p$ (Liften von Abbildungen)
Zu $y \in Y$ wähle Umgebung $U$ von $q(y)$ mit Überlagerungseigenschaft für $p$.
Dann hat $V = q^{-1}(U)$ die Überlagerungseigenschaft für $\pi$, denn $\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(q^{-1}(U)) = (q \circ \pi)^{-1}(U) = p^{-1}(U)$
$= \bigcup\limits_{i \in I} W_i$ disjunkt, $p\,|_{W_i}\colon W_i \to U$ homeomorph
Beachte: $\pi\,|_{W_i}\colon W_i \to q^{-1}(U) = V,\ (q \circ \pi)(W_i) = U\ \pi(W_i) \subset q^{-1}(U),\ q(\pi(W_i)) = U$
Konsequenz: Je zwei universelle Überlagerungen sind Überlagerungsisomorph (folgt aus Satz 8.8)

□

**Definition 8.5** $X$ semilokal einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Zu jedem $x_0 \in X$ existiert Umgebung $U$, so dass jede Schleife in $U$ nullhomotop in $X$

**Beispiel 8.4** $X$ einfach zusammenhängend ($U := X$)
Zu $x_0 \in X$ existiert einfach zusammenhängende Umgebung $U$ (Beispiel: Jede topologische Mannigfaltigkeit)

**Feststellung** $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ universelle Überlagerung $\Rightarrow$ $X$ semilokal einfach zusammenhängend
$U$ Umgebung mit Überlagerungseigenschaft: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$. Ist $\gamma$ Schleife in $U$, so ist $\tilde{\gamma} = (p\,|_{V_i})^{-1} \circ \gamma$ Schleife in $V_i$. $\tilde{x}$ zusammenziehbar in $\tilde{X}$. Projiziere nach unten $\to$ Zusammenziehung in $X$

mit anderen Worten: "semilokal einfach zusammenziehend" ist notwendige Bedingung für Existenz der universellen Überlagerung

**Satz 8.9 (Existenz der universellen Überlagerung)** Sei $X$ zusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Dann existiert universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$

*Beweis:* Eine Umgebung $U$ in $X$ heiße *einfach*, wenn $U$ wegweise zusammenhängend und jede Schleife in $U$ ist nullhomotop in $X$. Nach Vorraussetzung hat $X$ eine topologische Basis aus solchen Umgebungen.

(1) Fixiere $x_0 \in X$ und setze $\tilde{X} := \{[u] \mid u \in C^0([0,1], X) \wedge u(0) = x_0\}$
(Homotopien mit festen Endpunkten)
$p : \tilde{X} \to X, p([u]) = u(1) \in X$ (wohldefiniert)

(2) Topologie auf $\tilde{X}$
Beschreibung durch Basismengen: Sei $\alpha \in \tilde{X}$ und $U$ einfache Umgebung von $p(\alpha) = \alpha(1)$
$V(\alpha, U) := \{[u * v] \mid u \in \alpha, v \text{ Weg in } U \text{ mit } v(0) = \alpha(1)\} \subset \tilde{X}$
Sei $\beta \in V(\alpha, U) \cap V(\alpha', U')$. Also $\beta = [u * v]$ mit $u \in \alpha$ und $v$ Weg in $U$
$\Rightarrow V(\beta, U_0) = \{[u * v * w] \mid w \text{ Weg in } U_0\}$
Für $U_0 \subset U$ folgt $V(\alpha, U_0) \subset V(\alpha, U)$
$U_0 \subset (U \cap U')$ folgt $V(\beta, U_0) \subset V(\alpha, U) \cap V(\alpha', U')$ $\Rightarrow$Schnitt offen
$\Rightarrow$ Topologie wohldefiniert

$\square$

**Bezeichnung** $X$ heißt *hinreichend zusammenhängend*, wenn wegweise zusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend (d.H. $\forall x \in X$ gibt es eine Umgebungsbasis aus wegweise zusammenhängenden Mengen) und semilokal einfach zusammenhängend

**Satz 8.10 (Hauptsatz der Überlagerungstheorie)** Sei $X$ hinreichend zusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$

1. Zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ gibt es eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = G$
2. Zwei Überlagerungen $p_1, p_2$ von $Y_{1/2} \to X$ sind genau dann isomorph, wenn die Gruppen $G(Y_1), G(Y_2)$ konjugiert sind