Intuitionismus III (Modallogische Interpretation)

Definition Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell. Eine Formel φ heißt *gültig in* $\mathfrak{M}$, wenn gilt $\mathfrak{M} \models \varphi$. Eine Formel heißt *gültig*, wenn sie in allen Modellen gilt.

1 Das intuitionistische Kripke-Modell

Definition Ein Tupel $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models \rangle$ heißt *intuitionistisches Kripke-Modell* genau dann, wenn gilt:

1. $\mathfrak{R}$ ist eine reflexive, transitive Relation auf $\mathfrak{G}$

2. $\models$ ist eine Relation zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$ und $\mathcal{F}$, so dass für alle Aussagenvariablen A und Formeln φ, ψ gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma \models A,\ \Gamma \mathfrak{R} \Delta &\Rightarrow \Delta \models A \\ \Gamma \models (\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow (\Gamma \models \varphi \text{ und } \Gamma \models \psi) \\ \Gamma \models (\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow (\Gamma \models \varphi \text{ oder } \Gamma \models \psi) \\ \Gamma \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \not\models \varphi \\ \Gamma \models (\varphi \to \psi) &\Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : (\Delta \models \varphi \Rightarrow \Delta \models \psi) \end{aligned}$$

Folgerung 1: Für jede Formel φ gilt: $\Gamma \models \varphi,\ \Gamma \mathfrak{R} \Delta \Rightarrow \Delta \models \varphi$

Beweis: Per Induktion über Grad(φ)

□

Satz 1.1 Über den intuitionistischen Kripke-Modellen lassen sich topologische Räume konstruieren.

Definition Sei $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models \rangle$ ein Kripke-Modell. Eine Menge $X \subset \mathfrak{G}$ heißt *gerichtete Menge* genau dann, wenn gilt:

$$\forall \Delta_2 \in \mathfrak{G},\ \forall \Delta_1 \in X : \Delta_1 \mathfrak{R} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \in X$$

Beispiel: $\forall \Gamma \in \mathfrak{G} : D(\Gamma) := \{\Delta \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \mathfrak{R} \Delta\}$ ist gerichtet. Entsprechend:

$$\Gamma_1 \mathfrak{R} \Gamma_2 \Rightarrow D(\Gamma_2) \subset D(\Gamma_1)$$

Die gerichteten Mengen $D(\mathfrak{G})$ bilden eine Topologie über $\mathfrak{G}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G} \in D(\mathfrak{G}) &: \text{klar.}\\
\emptyset \in D(\mathfrak{G}) &: \text{klar.}\\
X, Y \in D(\mathfrak{G}) &: \Delta \in X \cap Y \Leftrightarrow \Delta \in X \wedge \Delta \in Y\\
&\Rightarrow \forall \Delta', \Delta \mathfrak{R} \Delta' : \Delta' \in X \wedge \Delta' \in Y \Rightarrow \Delta' \in X \cap Y\\
&\Rightarrow X \cap Y \in D(\mathfrak{G})\\
X_i \in D(\mathfrak{G}) \forall i \in I &: \Delta \in \bigcup_{i \in I} X_i \Rightarrow \exists j \in I : \Delta \in X_j\\
&\Rightarrow \forall \Delta', \Delta \mathfrak{R} \Delta' : \Delta' \in X_j \Rightarrow \Delta' \in \bigcup_{i \in I} X_i\\
&\Rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \in D(\mathfrak{G})
\end{aligned}$$

□

Satz 1.2 Intuitionistische Kripke-Modelle sind Modelle der intuitionistischen Aussagenlogik im Sinne vom Vortrag *Intuitionismus I*

Beweis: Wir definieren für jedes Kripke-Modell $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models \rangle$:

$$\begin{aligned}
\tau : \ \ & \mathcal{F}/\sim \to \mathcal{P}(\mathfrak{G})\\
& \varphi \mapsto \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models \varphi\}
\end{aligned}$$

Es gilt: $\tau(\mathcal{F}/\sim) \subset D(\mathfrak{G})$, da nach Folgerung 1 $\forall \varphi \in \mathcal{F}$:

$$\forall \Gamma \in \tau(\varphi) : \Gamma \models \varphi \Rightarrow \forall \Delta, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \models \varphi \Rightarrow \Delta \in \tau(\varphi) \Rightarrow \tau(\varphi) \in D(\mathfrak{G})$$

τ ist ein Homomorphismus von Heyting-Algebren
Beweis: $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}/\sim$:

$$\begin{aligned}
\tau(\bot) &= \emptyset : \text{klar.}\\
\tau(\top) &= \mathfrak{G} : \text{klar.}\\
\tau(\varphi \wedge \psi) &= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models (\varphi \wedge \psi)\}\\
&= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models \varphi \text{ und } \Gamma \models \psi\}\\
&= \tau(\varphi) \cap \tau(\psi)\\
\tau(\varphi \vee \psi) &= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models (\varphi \vee \psi)\}\\
&= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models \varphi \text{ oder } \Gamma \models \psi\}\\
&= \tau(\varphi) \cup \tau(\psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi \to \psi) &= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models (\varphi \to \psi)\} \\
&= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \models \varphi \Rightarrow \Delta \models \psi\} \\
&= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \models \psi \text{ oder } \Delta \not\models \varphi\} \qquad (\in D(\mathfrak{G})\ ) \\
&= \bigcup_{\Gamma \in \mathfrak{G}} \{D(\Gamma) \mid \forall \Delta \in D(\Gamma) : \Delta \models \psi \text{ oder } \Delta \not\models \varphi\} \\
&= \{\Gamma \in \mathfrak{G} \mid \Gamma \models \psi \text{ oder } \Gamma \not\models \varphi\}^{\circ} \\
&= (\tau(\varphi)^c \cup \tau(\psi))^{\circ}
\end{aligned}$$

□

Anmerkung Die Kripke-Modelle sind vollständig, d.h. eine Formel ist eine Tautologie genau dann, wenn sie in jedem Kripke-Modell gilt und genau dann *keine* Tautologie, wenn ein Kripke-Modell existiert, in dem sie *nicht* gilt[1].
(Folgt auch aus einem Analogon zum *Satz von Stone*: Jede Heyting-Algebra ist Unteralgebra eines topologischen Raumes)

2 Intuitionismus als Modell der S4-Modallogik

Seien $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_I \rangle$ bzw. $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_{S4} \rangle$ intuitionistische/S4-Modallogische Kripke-Modelle, dann gelten für alle intuitionistischen bzw. modallogischen Formeln φ, ψ folgende Eigenschaften:

1. $\mathfrak{R}$ ist reflexiv und transitiv
2. Für die Modellrelationen gilt:

Intuitionismus	**S4-Modallogik**
$\forall \Gamma \in \mathfrak{G}$:	$\forall \Gamma \in \mathfrak{G}$:
$\Gamma \models_I \varphi, \Gamma \mathfrak{R} \Delta \Rightarrow \Delta \models_I \varphi$	$\Gamma \models_{S4} \Box\varphi, \Gamma \mathfrak{R} \Delta \Rightarrow \Delta \models_{S4} \Box\varphi$
$\Gamma \models_I (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\Gamma \models_I \varphi$ und $\Gamma \models_I \psi)$	$\Gamma \models_{S4} (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\Gamma \models_{S4} \varphi$ und $\Gamma \models_{S4} \psi)$
$\Gamma \models_I (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\Gamma \models_I \varphi$ oder $\Gamma \models_I \psi)$	$\Gamma \models_{S4} (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\Gamma \models_{S4} \varphi$ oder $\Gamma \models_{S4} \psi)$
$\Gamma \models_I \neg\varphi \Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \not\models_I \varphi$	$\Gamma \models_{S4} \Box\neg\varphi \Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : \Delta \not\models_{S4} \varphi$
$\Gamma \models_I (\varphi \to \psi)$ $\Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : (\Delta \models_I \varphi \Rightarrow \Delta \models_I \psi)$	$\Gamma \models_{S4} \Box(\varphi \to \psi)$ $\Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathfrak{G}, \Gamma \mathfrak{R} \Delta : (\Delta \models_{S4} \varphi \Rightarrow \Delta \models_{S4} \psi)$
	$\Gamma \models_{S4} \neg\varphi \Leftrightarrow \Gamma \not\models_{S4} \varphi$
	$\Gamma \models_{S4} (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\Gamma \models_{S4} \psi$ oder $\Gamma \not\models_{S4} \varphi)$

[1]Zu finden in *van Dalen, Dirk - Intuitionistic Logic (Handbook of Philosophical Logic Volume III, Corollary 3.8 p.254)*

Wir definieren eine Abbildung M in die Modallogischen Formeln, so dass für alle intuitionistischen Formeln φ, ψ und atomares A gilt:

$$\begin{aligned} M(A) &= \Box A \\ M(\varphi \vee \psi) &= M(\varphi) \vee M(\psi) \\ M(\varphi \wedge \psi) &= M(\varphi) \wedge M(\psi) \\ M(\neg\varphi) &= \Box\neg M(\varphi) \\ M(\varphi \to \psi) &= \Box(M(\varphi) \to M(\psi)) \end{aligned}$$

Lemma 2.1 Sei $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_I \rangle$ ein intuitionistisches Modell und $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_{S4} \rangle$ ein S4-Modell, so dass für alle $\Gamma \in \mathfrak{G}$ und atomare A gilt:

$$\Gamma \models_I A \Leftrightarrow \Gamma \models_{S4} M(A)$$

Dann gilt für jede Formel φ:

$$\Gamma \models_I \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models_{S4} M(\varphi)$$

Beweis: Per Induktion über Grad(φ)

$\Box$

Lemma 2.2 Gegeben ein intuitionistisches Countermodell[2] für φ, dann gibt es ein S4-Countermodell für $M(\varphi)$

Beweis: Gegeben ein intuitionistisches Modell $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_I \rangle$, so dass $\exists \Gamma \in \mathfrak{G} : \Gamma \not\models_I \varphi$. Wir nehmen ein S4-Modell $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_{S4} \rangle$ und definieren $\models_{S4}$ über

$$\Delta \models_I A \Rightarrow \Delta \models_{S4} M(A)$$

für alle atomaren A und und alle $\Delta \in \mathfrak{G}$.
$\models_{S4}$ lässt sich eindeutig auf alle Formeln erweitern. Für atomare A gilt dann:

$$\begin{aligned} \Delta \models_{S4} M(A) &\Leftrightarrow \Delta \models_{S4} \Box A \\ &\Leftrightarrow \forall \Delta^* \in \mathfrak{G} : \ (\Delta^* \mathfrak{R} \Delta \Rightarrow \Delta^* \models_{S4} A) \\ &\Leftrightarrow \forall \Delta^* \in \mathfrak{G} : \ (\Delta^* \mathfrak{R} \Delta \Rightarrow \Delta^* \models_I A) \\ &\Leftrightarrow \Delta \models_I A \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus Lemma 2.1

$\Box$

[2] *Countermodell von φ:* Ein Modell, in dem φ *nicht* gilt

Lemma 2.3 Gegeben ein S4-Countermodell für $M(\varphi)$, dann gibt es ein intuitionistisches Countermodell für φ

Beweis: Gegeben ein S4-Modell $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_{S4} \rangle$, so dass $\exists \Gamma \in \mathfrak{G} : \Gamma \not\models_{S4} M(\varphi)$.
Wir nehmen ein intuitionistisches Modell $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models_I \rangle$ und definieren $\models_I$ über

$$\Delta \models_{S4} M(A) \Rightarrow \Delta \models_I A$$

für alle atomaren A und und alle $\Delta \in \mathfrak{G}$.
Die Behauptung folgt dann aus Lemma 2.1

□

Satz 2.4 Für jede intuitionistische Formel φ gilt:

$$\varphi \text{ ist intuitionistisch gültig} \Leftrightarrow M(\varphi) \text{ ist S4-gültig}$$

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 2.1-2.3

□

Beispiel: Für A, B atomar:

$$\begin{aligned} M[((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))] &= \Box(M[(A \to B)] \to M[((A \to \neg B) \to \neg A)]) \\ &= \Box(\Box(M[A] \to M[B]) \to \Box(M[(A \to \neg B)] \to M[\neg A])) \\ &= \Box(\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box(\Box(M[A] \to M[\neg B]) \to \Box\neg\Box A)) \\ &= \Box(\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box(\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B) \to \Box\neg\Box A)) \end{aligned}$$

3 Endliche Modelleigenschaft

Definition Eine Logik Σ hat die *endliche Modelleigenschaft (FMP)* genau dann, wenn jede nicht gültige Formel von Σ bereits in mindestens einem endlichen Modell von Σ nicht gültig ist.

Satz 3.1 Die Modallogik S4 hat die FMP.

Allgemeine Beweismethode: Per Γ-Filtration:
Sei $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \models \rangle$ ein Countermodell für φ. Wir betrachten die Formelmenge Γ, bestehend aus allen Teilformeln von φ. Man definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathfrak{G}$, so dass für zwei Welten $W_1, W_2 \in \mathfrak{G}$ gilt:

$$W_1 \sim W_2 \Leftrightarrow (\forall \psi \in \Gamma : W_1 \models \psi \Leftrightarrow W_2 \models \psi)$$

Da φ nur endlich viele Teilformeln hat, ist $\mathfrak{G}/\sim$ notwendigerweise endlich. Auf $\mathfrak{G}/\sim$ lässt sich dann ein neues und dementsprechend ebenfalls endliches Modell konstruieren, das nach wie vor ein Countermodell für φ ist.

$\square$

Definition Eine Menge $X \subset \mathbb{N}$ heißt *rekursiv aufzählbar* (r.e. – recursively enumerable) genau dann, wenn eine Turing-Maschine[3] T existiert, so dass $x \in X \Leftrightarrow T(x) = 1$ und $T(x)$ terminiert[4] $\forall x \in X$

Eine Menge $X \subset \mathbb{N}$ heißt *rekursiv* (oder *berechenbar*) genau dann, wenn sowohl X als auch X^C r.e. sind, d.h. es existiert eine Turing-Maschine T, so dass $x \in X \Leftrightarrow T(x) = 1$, $x \notin X \Leftrightarrow T(x) = 0$ und $T(x)$ terminiert $\forall x \in \mathbb{N}$

Folgerung Eine Logik Σ ist entscheidbar, wenn sie FMP besitzt und endlich axiomatisierbar[5] ist.

Beweis: Jede Formel lässt sich als natürliche Zahl codieren (*Gödelisierung*). Ist Σ endlich axiomatisiert, so ist die Menge aller codierten Theorien $F \subset \mathbb{N}$ r.e. Besitzt sie zusätzlich die endliche Modelleigenschaft, so ist dementsprechend auch F^C r.e., also ist F rekursiv, also ist Σ entscheidbar.

$\square$

Folgerung S4 und somit auch die intuitionistische Aussagenlogik sind entscheidbar.

[3] Grob: Ein theoretisches Konstrukt, das in der Lage ist, mathematische Algorithmen auszuführen. z.B. ist jeder Computer eine Turing-Maschine
[4] d.h. die Maschine gibt nach endlicher Zeit ein Ergebnis zurück
[5] genauer: mit endlich vielen Axiomenschemata axiomatisierbar