General Abstract Nonsense

1 Grundbegriffe

Definition 1.1 Kategorie Eine Kategorie $\underline{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $Ob(\underline{C}) = \underline{C}_0$ und Morphismen (Pfeilen) $Morph(\underline{C}) = \underline{C}_1$. Für jeden Pfeil f gibt es ein Source-Objekt $Dom(f)$ und ein Target-Objekt $Cod(f)$. Wir bezeichnen die Menge aller Pfeile von A nach B mit $Hom(A, B) = \{f \in \underline{C} \mid dom(f) = A, cod(f) = B\}$ Für je drei Objekte A, B, C gibt es eine Abbildung $\circ_{A,B,C} : Hom(A, B) \times Hom(C, A) \to Hom(C, B)$, so dass:

1. Es gibt für jedes Objekt X einen Pfeil $1_X \in Hom(X, X)$, so dass für jeden anderen Pfeil mit passender Source/Target f gilt $f \circ 1_X = f$ bzw. $1_X \circ f = f$
2. Das Assoziativgesetz gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Beispiel 1.1

1. $\underline{C}_0 = \underline{C}_1 = \varnothing$
2. Diskrete Kategorien: Beliebige Objekte mit nur Identitätspfeilen
3. SET: SET_0 enthält alle Mengen, SET_1 enthält alle Abbildungen zwischen Mengen
   Alternativ: SET_1 enthält genau alle Inklusionen
4. REL: Gleiche Objekte, $Hom(A, B) = \mathcal{P}(A \times B) \ni R$
   $R(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}$
5. $GROUPS$: Objekte sind Gruppen, Pfeile sind Gruppenhomomorphismen
6. Jede Gruppe/Monoid ist eine Kategorie mit einem Objekt und den Gruppenelementen als Pfeilen
7. TOP: Topologische Räume als Objekte, stetige Abbildungen als Pfeile
8. Präordnungen: $|Hom(A, B)| \leq 1$ (Pfeile sind reflexiv und transitiv)

Eine Kategorie $\underline{C}$ heißt *klein*, wenn $\underline{C}_0$ und $\underline{C}_1$ Mengen sind und *lokal klein*, wenn für je zwei Objekte A, B die Klasse der Pfeile $Hom(A, B)$ eine Menge ist.

Die Kategorie $\underline{1}$ hat genau ein Objekt (mit Identität)
Die Kategorie $\underline{2}$ hat genau zwei Objekte und einen Pfeil vom ersten Objekt ins zweite.

Kategorien, bei denen die Objekte Mengen und die Pfeile Abbildungen zwischen den Mengen sind, heißen konkret

Dualitätsprinzip

Definition 1.2 Sei $\underline{C}$ eine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\underline{C}^{op}$ ist definiert als: $\underline{C}_0^{op} = \underline{C}_0$ und jeder Pfeil in $\underline{C}_1$ liegt mit vertauschter Domäne/Kodomäne in $\underline{C}_1^{op}$
Sei zu $f \in \underline{C}_1$ mit $dom(f) = A, cod(f) = B$: $f^{op} \in \underline{C}_1^{op}$ mit $dom(f) = B, cod(f) = A$
Verknüpfung: $f^{op} \circ g^{op} := (g \circ f)^{op}$

Wenn eine Aussage in allen Kategorien gilt, dann auch die duale Aussage, die entsteht, wenn *cod* durch *dom* ersetzt wird (und umgekehrt) und die Richtung aller Verknüpfungen umgedreht wird (weil $(\underline{C}^{op})^{op} = \underline{C}$).

Definition 1.3 Seien $\underline{C}, \underline{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F : \underline{C} \to \underline{D}$ besteht aus zwei Abbildungen

1. $F_0 : \underline{C}_0 \to \underline{D}_0$
2. $F_1 : \underline{C}_1 \to \underline{D}_1$

so dass für jedes $f \in Hom(A, B)$: $Ff \in Hom(FA, FB)$,für alle (geeigneten) Pfeile f, g: $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$ und für jedes Objekt A: $F1_A = 1_{FA}$

F ist *voll*, falls F auf allen Hom-Sets surjektiv ist
F heißt *treu*, falls F auf allen Hom-Sets injektiv ist

Beispiel 1.2

1. Identitätsfunktor (voll, treu)
2. Vervollständigung metrischer Räume (Metrische Räume auf metrische Räume, voll, treu)
3. Metrische Räume auf topologische Räume (Einbettung)
4. $U : GROUPS \to SETS$, $U_0(G) = G$, $U_1(f) = f$ - „Vergissfunktor“, treu, nicht voll
5. Für V K-Vektorraum, V^* Dualraum - $f : V \to W \Rightarrow f^* : W^* \to V^*$. Dann ist $*$ ein Funktor von $(K - VEC)^{op} \to K - VEC$: $1_V^* = 1_{V^*}, (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ (Kontravarianter Funktor)
6. Sei $\underline{C}$ lokal klein, $A \in \underline{C}$. Definiere $Hom(A, -) : \underline{C} \to SETS$
   - auf Objekten: $B \mapsto Hom(A, B)$

- auf Pfeilen: $(f : B \to C) \mapsto (Hom(A, f) : Hom(A, B) \to Hom(A, C))$ also $g \mapsto f \circ g$

   Analog für $Hom(-, A)$ (liefert Funktor $\underline{C}^{op} \to SETS$)

7. in $SETS$: $Hom(-, \{0, 1\}) : M \mapsto Hom(M, \{0, 1\}) \cong \mathcal{P}(M)$
8. $g : M \to N$, $\underbrace{Hom(g, \{0, 1\})}_{g^*} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M), g^*(N') = g^{-1}(N')$

Definition 1.4 Ein Pfeil $f : A \to B$ heißt *Monomorphismus* ($f : A \hookrightarrow B$) genau dann, wenn für alle (sinnvollen) g, h gilt: $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$
Ein Pfeil $f : A \to B$ heißt *Epimorphismus* ($f : A \twoheadrightarrow B$) genau dann, wenn für alle (sinnvollen) g, h gilt: $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$
Ein Pfeil $f : A \to B$ heißt *Isomorphismus* genau dann, wenn ein $g : B \to A$ existiert, so dass $g \circ f = 1_A$ und $f \circ g = 1_B$

2 Initiale und terminale Objekte

Definition 2.1 Ein Objekt O heißt *initial (terminal)*, wenn es für jedes Objekt C einen eindeutigen Morphismus $f : O \to C$ (initial) bzw. $f : C \to O$ (terminal) gibt.
Jedes initiale (terminale) Objekt in $\underline{C}$ ist ein terminales (initiales) Objekt in $\underline{C}^{op}$
Initiale (Terminale) Objekte sind eindeutig isomorph.

Beispiel 2.1

1. SET: Die leere Menge ist initial, Singletons sind terminal
2. CAT: Die 0-Kategorie ist initial, die einelementige Kategorie mit Identität ist terminal
3. *Groups*: Die einelementige Gruppe ist initial *und* terminal. Das selbe gilt für Kategorien der Vektorräume, Lineare Transformationen, Monoide und Monoidhomomorphismen
4. *Rings*: $\mathbb{Z}$ ist initial, der einelementige Ring mit $1 = 0$ ist terminal
5. *poset*: kleinste/größte Elemente

3 Frei erzeugte Monoide

Jedes Monoid M hat eine zugrundeliegende Menge UM, jede Funktion $f : M \to N$ eine „zugrundeliegende “ Funktion $Uf : UM \to UN$ (Die Abbildung zwischen diesen ist ein

vergesslicher Funktor).
Das *freie Monoid* $M(A)$ über einer Menge ist das Monoid mit der folgenden *Universellen Eigenschaft*:

Es gibt eine Funktion $i : A \to U(M(A))$ und für jedes Monoid N und jede Funktion $f : A \to UN$ gibt es einen *eindeutigen* Monoid-Homomorphismus $\overline{f} : M(A) \to N$, so dass $U(\overline{f}) \circ i = f$
Damit sind wir in der Lage das frei erzeugte Monoid in der Sprache der Kategorientheorie zu definieren. Wir müssen nur zeigen, dass ein Monoid mit der universellen Eigenschaft existiert und bis auf isomorphie eindeutig ist.

Satz 3.1 Die Kleenesche Hülle A^* über A hat die universelle Eigenschaft

Beweis: Existenz: Für $f : A \to UN$, setze $\overline{f} : A^* \to N$:

$$\overline{f}(-) = e_N$$
$$\overline{f}(a_1 a_2, ..., a_n) = f(a_1) \cdot_N f(a_2) \cdot_N ... \cdot_N f(a_n)$$

Offensichtlich ist $\overline{f}$ ein Homomorphismus und es gilt $\overline{f}(a) = f(a) \forall a \in A$
Eindeutigkeit: Angenommen $g : A^* \to N$ erfüllt die selbe Eigenschaft, dann folgt sofort $g = \overline{f}$

□

Satz 3.2 Das frei erzeugte Monoid über A ist bis auf isomorphie eindeutig

Beweis: Angenommen wir haben zwei verschiedene Monoide M und N und Abbildungen $i : A \to UM$ und $j : A \to UN$ mit der universellen Eigenschaft. Dann haben wir also $\overline{j} : M \to N$ mit $U(\overline{j}) \circ i = j$ und analog $U(\overline{i}) \circ j = i$. Dann gilt entsprechend $U(\overline{i} \circ \overline{j}) i = i$, und nachdem nach der universellen Eigenschaft der Homomorphismus mit dieser Eigenschaft eindeutig ist $U(\overline{i} \circ \overline{j}) = 1_M$ und analog $U(\overline{j} \circ \overline{i}) = 1_N$

□

Ähnliches lässt sich direkt mit Kategorien machen wodurch die frei erzeugte Kategorie entsteht (Jeder Graph generiert eine Kategorie, Funktionen entsprechen Pfaden, Knoten entsprechen Objekten)

4 Universelle Objekte

Definition 4.1 Sei $S : \underline{D} \to \underline{C}$ ein Funktor und c ein Objekt in $\underline{C}$. Ein *universeller Pfeil* von c auf S besteht aus einem Objekt r in $\underline{D}$ und einem Morphismus $u : c \to Sr$, so dass für jedes andere Objekt d und jeden Morphismus $f : c \to Sd$ ein eindeutiger Morphismus $f' : r \to d$ existiert mit $Sf' \circ u = f$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] & Sr \arrow[d, "Sf'"] & r \arrow[d, "f'"] \\
c \arrow[r, "f"] & Sd & d
\end{tikzcd}$$

Analog umgekehrt:

$$\begin{tikzcd}
 & Sr \arrow[dl, "u"] & r \\
C & & \\
 & Sd \arrow[ul, "f"] \arrow[uu, "Sf'"'] & d \arrow[uu, "\exists! f'"']
\end{tikzcd}$$

Äquivalent: $u : c \to Sr$ ist universell genau dann wenn das Paar (r, u) ein initiales Objekt in der Komma-Kategorie der Morphismen $c \to Sd$ ist.
Universelle Objekte sind bis auf Isomorphie eindeutig.

Beispiel 4.1

1. Basen von Vektorräumen: Betrachte die Basis X eines Vektorraumes V_X in *Sets*. Die Einbettung $j : X \to U(V_X)$ bildet dann einen universellen Pfeil von X auf den vergesslichen Funktor

2. Der Funktor von einem Graphen auf die korrespondierende freie Kategorie. Analog für freie Monoide auf einer Erzeugermenge

5 Produkte und Koprodukte

Definition 5.1 Ein *Produkt* von zwei Objekten A, B einer Kategorie $\underline{C}$ ist ein Objekt P mit zwei Pfeilen $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ So dass die folgende *universelle Eigenschaft* gilt: Für jedes Diagramm der Form $A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$ gibt es ein eindeutiges $u : X \to P$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\
A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Produkte sind bis auf Isomorphie eindeutig, das leere Produkt ist terminal

Beispiel 5.1

1. *Sets*: Kartesische Produkte
2. Gruppen, Monoide etc.: Paare mit komponentenweiser Verknüpfung
3. Produkte von Kategorien: Paare von Objekten/Morphismen
4. *poset*: größte untere Schranken
5. Topologische Räume: Produkttopologie

Koprodukte

Analog zu oben:

Definition 5.2 Ein Diagramm $A \xrightarrow{q_1} A + B \xleftarrow{q_2} B$ ist ein Koprodukt von A, B wenn für jedes Z mit $A \xrightarrow{z_1} Z \xleftarrow{z_2} B$ ein eindeutiges $u : Q \to Z$ existiert, so dass $u \circ q_i = z_i$
Koprodukte sind bis auf Isomorphie eindeutig, das leere Koprodukt ist initial

Beispiel 5.2

1. *Sets*: Disjunkte Vereinigung - z.B. $A + B := \{(a, 1) \mid a \in A\} \cup \{(b, 2) \mid b \in B\}$ mit Koprojektionen $i_1(a) = (a, 1)$ und $i_2(b) = (b, 2)$
2. Frei erzeugte Monoide: $M(A) + M(B) = M(A + B)$
3. Topologische Räume: Disjunkte Vereinigung mit Produkttopologie
4. *poset*: kleinste obere Schranken
5. Gruppen: Das freie Produkt $A \oplus B$
6. Abelsche Gruppen: Binäres Koprodukt (Isomorph zum normalen Produkt)

6 Equalizer und Koequalizer

Definition 6.1 Gegeben ein Diagramm $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ ist ein *Equalizer* von f und g ein Objekt E und ein Morphismus $e : E \to A$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ e = g \circ e$ und für jedes andere Objekt X mit Morphismus x und $f \circ x = g \circ x$ es ein eindeutiges $u : X \to E$ mit $e \circ u = z$ gibt

Satz 6.1 Jeder Equalizer ist mono

Beweis: Angenommen f ist Equalizer von f und g und x, y beliebige andere Morphismen mit $ex = ey$. Dann gilt $(fe)x = (ge)x$, also gibt es ein eindeutiges u mit $eu = ex = ey$, also $u = x = y$

□

Beispiel 6.1

1. *Sets*: Die Einbettung der Teilmenge $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$
2. Topologische Räume: Seien $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $g(x, y) = 1$ jeweils von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, dann ist ein Equalizer der Einheitskreis mit Einbettung in den $\mathbb{R}^2$
3. Allgemein ist der Kern von $f - g$ mit der Einbettung ein Equalizer

Definition 6.2 Seien f, g wie oben, ein *Koequalizer* ist ein Objekt Q mit Morphismus $q : B \to Q$ universell mit der Eigenschaft, dass $qf = qg$
Jeder Koequalizer ist episch.

Beispiel 6.2 Quotienten über Äquivalenzrelationen: Sei $\sim \subset X^2$ eine Äquivalenzrelation auf X und betrachte das Diagramm $\sim \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$, wobei die π_i die Projektionen sind. Dann ist die kanonische Abbildung $\pi : X \to X/\sim$ ein Koequalizer von π_1 und π_2

Definition 6.3 Für ein Objekt X in einer Kategorie $\underline{C}$ ist die *Slice-Kategorie* $\underline{C}/X$ die Kategorie mit allen Pfeilen f mit $cod(f) = X$ als Objekten. Ein Pfeil f von $a : A \to X$ und $b : B \to X$ ist ein Pfeil $f : A \to B$, so dass $b \circ f = a$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "a"'] & & B \arrow[dl, "b"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Analog wird $X/\underline{C}$ definiert

Definition 6.4 Sei $S : \underline{D} \to \underline{C}$, $C \in \underline{C}_0$. Die *Komma-Kategorie* $(C \downarrow S)$ hat als Objekte Paare (D, f) mit $D \in \underline{D}_0, f : C \to SD$, Pfeile $D \to E$ sind Pfeile aus $\underline{D}$ so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & SD \arrow[dd, "S\overline{f}"] \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & SE
\end{tikzcd}$$

Entsprechend $(C \uparrow S)$ mit umgedrehten Pfeilen

Satz 6.2 (R, f) ist universell von $C \in \underline{C}_0$ auf S genau dann, wenn (R, f) initial in $(C \downarrow S)$ ist. *Dual:* (R, f) ist universell von S auf C genau dann, wenn (R, f) terminal in $(C \uparrow S)$ ist.

Korollar Universelle Pfeile sind bis auf Isomorphie in der Komma-Kategorie eindeutig. Insbesondere sind die universellen Objekte nach Anwendung von S in $\underline{C}$ isomorph

Falls S treu ist sind die universelle Objekte auch schon in $\underline{D}$ isomorph

Beweis: $(R, f), (R', f')$ Initialobjekte in $(C \downarrow S) \Rightarrow \exists\ R \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} R' : SR \underset{Sh}{\overset{Sg}{\rightleftarrows}} SR'$
Also $S(gh) = Sg \circ Sh = 1 = S1$ und $S(hg) = Sh \circ Sg = 1 = S1$, also $gh = hg = 1$

□

Definition 6.5 Ein *Subobjekt* eines Objektes X ist ein Monomorphismus $m : M \hookrightarrow X$ Gegeben zwei Subobjekte $m : M \hookrightarrow X$ und $m' : M' \hookrightarrow X$ ist ein Pfeil $f : m \to m'$ ein Pfeil in $\underline{C}/X$, wodurch die Menge aller Subobjekte von X in einer Kategorie $\underline{C}$ zur Kategorie $Sub_{\underline{C}}(X)$ wird.

7 Pullbacks

Definition 7.1 Gegeben zwei Pfeile $f : A \to X, g : B \to X$ besteht ein *Pullback* aus zwei Pfeilen $p_1 : P \to A$ und $p_2 : P \to B$, so dass $fp_1 = gp_2$ universell mit dieser Eigenschaft (für zwei andere Pfeile q_1, q_2 mit der selben Eigenschaft gibt es ein $u : Q \to P$ mit $q_1 = p_1 u$ und $q_2 = p_2 u$).
*Dual:*Pushouts

8 Natürliche Transformationen

Definition 8.1 Seien $\underline{C}, \underline{D}$ Kategorien mit zwei Funktoren $F, G : \underline{C} \to \underline{D}$. Eine *Natürliche Transformation* η zwischen F und G hat folgende Eigenschaft:
Für alle A in $\underline{C}_0$ gibt es η_A in $\underline{D}_1$ mit $\eta_A : FA \to GA$ so dass für alle $f \in \underline{C}_1$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_A"] & FB \arrow[d, "\eta_B"] \\
GA \arrow[r, "Gf"] & GB
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{D}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & FA \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dd, "\eta_A"] & & FB \arrow[dd, "\eta_B"] \\
A \arrow[urr, "F"] \arrow[drr, "G"'] \arrow[r, "f"] & B \arrow[urrr, "F"] \arrow[drrr, "G"'] & & & \\
& & GA \arrow[rr, "Gf"] & & GB
\end{tikzcd}$$

Beispiel 8.1

1. $\eta : Hom_{SETS}(1, -) \Rightarrow 1_{SETS}$

$$\begin{tikzcd}
Hom(1, A) \arrow[r, "(1,f)"] \arrow[d, "\eta_A"] & Hom(1, B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

2. $\mu : Hom_{SETS}(-, 2) \Rightarrow \mathbb{P}$ (Potenzmengenfunktor)

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, 2) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mu_A"] & Hom(B, 2) \arrow[d, "\mu_B"] \\
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathbb{P}f"] & \mathcal{P}(B)
\end{tikzcd}$$

9 Das Yoneda-Lemma

Sei $\underline{C}$ lokal klein, $A \in \underline{C}_0$, betrachte $Hom(A, -) : \underline{C} \to SETS$. Wann gilt $Hom(A, -) \cong Hom(B, -)$?
Angenommen $f : A \to B$ Isomorphismus, $g : C \to D$:

$$\begin{tikzcd} h \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & g \circ h \arrow[ddd] \\ & Hom(A,C) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_C=(f^{-1})^*"] & Hom(A,D) \arrow[d, "\eta_D=(f^{-1})^*"] & \\ & Hom(B,C) \arrow[r, "g_*"] & Hom(B,D) & \\ h \circ f^{-1} \arrow[rrr] & & & g \circ h \circ f^{-1} \end{tikzcd}$$

Yoneda-Lemma: Sei $F : \underline{C} \to SETS$ ein Funktor, $\underline{C}$ lokal klein, $A \in \underline{C}_0$. Dann ist

$$Nat(Hom(A,-),F) \to FA$$
$$(\eta : Hom(A,-) \Rightarrow F) \mapsto \eta_A(1_A)$$

eine Bijektion.
$Nat(F,G)$ ist die Menge der natürlichen Transformationen zwischen F und G

Beweis:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & Hom(A,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_A"] & Hom(A,B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_B"] & Hom(A,C) \arrow[d, "\eta_C"] \\ B & FA \arrow[r, "Ff"] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Sei $x \in FA$ gegeben. Für $f \in Hom(A,B)$ setze $\eta_B(f) := Ff(x)$.
Natürlich: $f \mapsto Ff(x) \mapsto Fg(Ff(x))$
$f \mapsto g \circ f \mapsto F(g \circ f)(x) = Fg(Ff(x)) \Rightarrow$ das rechte Quadrat kommutiert
$Hom(A,A) \ni 1_A \mapsto (F1_A)(x) = x = 1_{FA}$
$Ff(x) = Ff(\eta_A(1_A)) = \eta_B(f) \Rightarrow$ das linke Quadrat kommutiert

$\square$

Insbesondere gilt also: $Nat(Hom(A,-),Hom(B,-)) \leftrightarrow Hom(B,A)$ ist bijektiv

Die Yoneda-Einbettung $\underline{C}$ lokal klein. Betrachte $y : \underline{C} \to SETS^{\underline{C}^{op}}$ (Kategorien der kontravarianten Funktoren von $\underline{C}$ nach $SETS$), $yA = Hom(-,A)$. y lässt sich (auf Pfeilen) so definieren, dass y voll, treu und injektiv auf Objekten ist:
$f : A \to B, \forall g : C \to D :$

$$\begin{tikzcd} Hom(C,A) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "(yf)_C"] & Hom(D,A) \arrow[d, "(yf)_D"] \\ Hom(C,B) \arrow[r, "g^*"] & Hom(D,B) \end{tikzcd}$$

Dies wird erreicht durch $(yf)_C := f_*,\ (yf)_D := f^*$:

Beweis: Injektiv: Klar, da $Hom(-,A) = Hom(-,B) \Rightarrow A = B$
treu, voll: Gegeben zwei Objekte $A, B \in \underline{C}_0$.
$\mathbb{Z}$ $y_1 : Hom_{\underline{C}}(A,B) \to Nat(Hom(-,A), Hom(-,B))$ ist bijektiv.
Da $\forall B : Hom_{\underline{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\underline{C}}(B,A)$ und $Hom_{\underline{C}}(A,B) = Hom_{\underline{C}^{op}}(B,A)$ folgt das aus dem Yoneda-Lemma für $\underline{C}^{op}$

□

10 Limiten

Gegeben ein Funktor $D : \underline{J} \to \underline{C}$ (Man stelle sich$J$ als Diagramm, bzw. eine Art „Indexkategorie“vor, üblicherweise klein, meistens sogar endlich)
$i \mapsto D_i$, $\alpha \mapsto D_\alpha$
$\Delta : \underline{C} \to \underline{C}^{\underline{J}}$
$A \mapsto \Delta A$ (Konstant A), $f \mapsto \Delta f$ (f in jeder Komponente)

Definition 10.1 Limes $(\underline{\lim}_{\underline{J}} D, p)$ universeller Pfeil von Δ nach D

$$\begin{tikzcd} & \Delta(\underline{\lim}_{\underline{J}} D) \arrow[dl, "p"'] & \underline{\lim}_{\underline{J}} D \\ D & & \\ & \Delta T \arrow[ul, "q"] \arrow[uu, "\Delta\overline{f}"'] & T \arrow[uu, "\exists!\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Ein Limes ist ein „universeller Kegel“
Explizit: $\forall i \in \underline{J}_0 : p_i : \underline{\lim}_{\underline{J}} D \to D_i$ mit $\forall \alpha : i \to j \in \underline{J}_1$:

$$\begin{tikzcd} & \underline{\lim}_{\underline{J}} D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"] & & D_j \end{tikzcd}$$

Beispiel 10.1

1. *Produkt:* $\underline{J}$: Diskrete Kategorie mit zwei Objekten i, j
   $A \xleftarrow{p_i} \underline{\lim}_{\underline{J}} D \xrightarrow{p_j} B$
2. *Equalizer:* $\underline{J}$: $i \rightrightarrows j \xmapsto{D} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$

$$\begin{tikzcd} & \underline{\lim}_{\underline{J}} D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & B \end{tikzcd}$$

3. *Terminalobjekt:* $\underline{J}$: leere Kategorie$\mapsto$leere (Teil-)kategorie, dann gibt es in der Zielkategorie wegen Universalität genau einen Pfeil in das Zielobjekt

4. *Pullbacks:* $\underline{J}$:

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & B \arrow[d] \\ j \arrow[r] & k & A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \underline{\lim}_{\underline{J}} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Limits in $SETS$

Satz 10.1 $\underline{J}$ klein $\Rightarrow$ alle $D : \underline{J} \to SETS$ haben Limit in $SETS$

Beweis: $\left\{ (d_i)_{i \in \underline{J}_0} \in \prod_{i \in \underline{J}_0} D_i \mid \forall \alpha \in \underline{J}_1 : D_\alpha(d_{dom(\alpha)}) = d_{cod(\alpha)} \right\}$,

$$\begin{aligned} p_i : \underline{\lim}_{\underline{J}} D &\to D_i \\ (d_i)_i &\mapsto d_i \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \underline{\lim}_{\underline{J}} D \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"] & & D_j \\ & T \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q_j"'] \arrow[uu, dotted, bend left=60, "\exists! f"] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Satz 10.2 $\underline{C}$ habe über $\underline{J}_0$ und $\underline{J}_1$ indizierte Produkte und Equalizer von je zwei Pfeilen. Dann haben alle $D : \underline{J} \to \underline{C}$ einen Limes in $\underline{C}$

Beweis: $\alpha \in \underline{J}_1$:

$$\begin{tikzcd}
D_{cod(\beta)} & D_{cod(\beta)} \arrow[l, "1"'] & \\
\prod\limits_{\alpha\in\underline{J}_1} D_{cod(\alpha)} \arrow[u, "\tilde{q}_\beta"] \arrow[d, "\tilde{q}_\beta"'] & \prod\limits_{i\in\underline{J}_0} D_i \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[u, "q_{cod(\beta)}"'] \arrow[d, "q_{dom(\beta)}"'] \arrow[dr, "q_i"'] & E \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "p_i"] \\
D_{cod(\beta)} & D_{dom(\beta)} \arrow[l, "D_\beta"] & D_i
\end{tikzcd}$$

f, g aus universeller Eigenschaft des Produkts. (E, e) sei Equalizer von f, g

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
D_i \arrow[rr, "D_f"] & & D_j
\end{tikzcd}$$

$D_\beta p_i = D_\beta q_i e = \tilde{q}_\beta g e = \tilde{q}_\beta f e = q_j e = pj$ und damit erhalten wir einen Kegel.

$\not{Z}$ universell:

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & & T \arrow[lll, dotted, bend left=0, "\tilde{p}_i" near end] \arrow[ll, dotted, "\exists!"'] \arrow[dl, "\tilde{p}_j"] \\
D_i \arrow[rr, "D_f"] & & D_j &
\end{tikzcd}$$

Wir haben eindeutigen Pfeil $\tilde{e} : T \to \prod\limits_{i\in\underline{J}_0} D_i$ aus univ. Eig. vom Produkt.

Brauchen: $f\tilde{e} = g\tilde{e}$.

Betrachte $\forall\beta$: $\tilde{q}_\beta f\tilde{e} = q_j\tilde{e} = \tilde{p}_j = D_\beta\tilde{p}_i = D_\beta q_i\tilde{e} = \tilde{q}_\beta g\tilde{e}$. Die Behauptung folgt nach univ. Eig. des $\underline{J}_1$-Produkts

$\square$

11 Adjoints

Sei $F : SETS \to MON$ der Funktor, der eine Menge auf ihr frei erzeugtes Monoid abbildet. $SETS \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} MON$

Suchen Zusammenhang zwischen Menge X und $UF(X)$. Nach universeller Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
& UF(X) \arrow[dd, "Uf"] & F(X) \arrow[dd, dotted, "\exists! f"] \\
X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[dr, "l"'] & & \\
& U(M) & M
\end{tikzcd}$$

erhalten wir eine natürliche Transformation zwischen 1_{SETS} und UF (Die *Einheit*).

Umgekehrt wollen wir eine nat. Trafo von 1_{MON} auf FU:

$$\begin{tikzcd} FU(M) \arrow[r, "FU(f)"] \arrow[d] & FU(N) \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

(Die *Koeinheit*)

Offensichtlich gilt: $Hom_{SETS}(X, UM) \cong Hom_{MON}(FX, M)$ (eindeutig bestimmt durch Erzeugende), Einheit und Koeinheit heißen *adjungiert*.

Definition 11.1 Adjungierte Funktoren Seien $\underline{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \underline{D}$ Funktoren. F heißt *linksadjungiert* zu G ($F \dashv G$) gdw eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\exists \eta : 1_{\underline{C}} \Rightarrow GF \; \forall A \in \underline{C}_0 : (FA, \eta_A)$ universell von A auf G:

$$\begin{tikzcd} & GFA \arrow[dd, "G\overline{f}"] & FA \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{f}"] \\ A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & & \\ & GT & T \end{tikzcd}$$

- $\exists \varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\underline{D}} \; \forall A \in \underline{D}_0 : (GA, \varepsilon_A)$ universell von F auf A:

$$\begin{tikzcd} & FGA \arrow[dl, "\varepsilon_A"] & GA \\ A & & \\ & FT \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, "F\overline{f}"'] & T \arrow[uu, dotted, "\exists!\overline{f}"] \end{tikzcd}$$

- Es existiert ein natürlicher Isomorphismus von Funktoren $\underline{C}^{op} \times \underline{D} \to SETS$:

$$Hom_{\underline{D}}(F(-), -) \cong Hom_{\underline{C}}(-, G(-))$$

Entsprechend heißt G *Rechtsadjungiert* zu F

Satz 11.1 Rechtsadjungierte sind bis auf Isomorphie eindeutig

Beweis: Sei also $F \dashv G$, $F \dashv G'$, dann
$Hom(A, GB) \cong Hom(FA, B) \cong Hom(A, G'B)$
Die Behauptung folgt aus dem Yoneda-Lemma

□

Beispiel 11.1 $RING_*$ Kategorie der Punktierten Ringe, Pfeile sind $(R, r) \xrightarrow{\varphi} (S, \varphi(s))$, $\varphi \in RING_1$
$U : RING_* \to RING$, $(R, r) \mapsto R$, suche $F \dashv U$
Finden $[x] : R \to (R[x], x)$. $\dfrac{[x]R \to (S, s)}{R \to U(S, s)}$, d.h. $\dfrac{(R[x], x) \to (S, s)}{R \to S}$

Satz 11.2 RAPL Rechtsadjungierte erhalten Limiten (*R*ight-*A*djoints *P*reserve *L*imits)[1]

Beweis: Sei also $\underline{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \underline{D}$ gegeben:

$\underline{C}$

$$\begin{tikzcd}
& G(\underline{\lim}_J D) \arrow[dl, "G\eta_i"'] \arrow[dr, "G\eta_j"] & \\
GD_i \arrow[rr, "GD_\alpha"] & & GD_j \\
& T \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q_j"'] \arrow[uu, bend left=90, "\tilde{\psi}"] &
\end{tikzcd}$$

$\underline{D}$

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\lim}_J D \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_j"] & \\
D_i \arrow[rr, "D_\alpha"] & & D_j \\
& FT \arrow[ul, "Fq_i"] \arrow[ur, "Fq_j"'] \arrow[uu, bend right=90, "\exists!\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Satz 11.3 Freyd $\underline{C}$ sei klein und vollständig (alle kleinen Limiten existieren), $U : \underline{C} \to \underline{X}$

1. U hat linksadjungiertes
2. U erhält Limiten und $\forall X \in \underline{X}_o$ gilt die solution set condition:
   $\exists$Menge $(C_i)_{i \in I} \subset \underline{C}_0$, so dass $\forall C \in \underline{C}_0$: $x \xrightarrow{f} UC$, dann $\exists i \in I$:

   $$\begin{tikzcd}
   X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & UC_i \arrow[d, "U\bar{f}"] \\
   & UC
   \end{tikzcd}$$

   „Jeder Pfeil $X \xrightarrow{f} UC$ faktorisiert über die solution sets“

Definition 11.2 Zwei Kategorien $\underline{C}, \underline{D}$ sind *äquivalent*, wenn es Funktoren $F : \underline{C} \to \underline{D}$, $G : \underline{D} \to \underline{C}$ gibt, so dass $GF \cong 1_{\underline{C}}$ und $FG \cong 1_{\underline{D}}$

[1] Ein Funktor erhält Limiten, wenn gilt: $G(\underline{\lim}_J D) = \underline{\lim}_J G(D)$ (nicht nur für Limits selbst, sondern für ganze Kegel)