Nichtstandard Analysis

Aktueller Stand: 6. Dezember 2012

Nichtstandard Modelle

Aussagen	*Gültigkeitsbereiche*
$(\forall x)(x^2 \geq 0)$	gültig in $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ nicht gültig in $\mathbb{C}$
p Punkt, g, h, h_1, h_2 Geraden $(\forall g)(\forall p \notin g)(\exists! h)(p \in h) \wedge (h \| g)$	gültig in Euklidischer Geometrie nicht gültig hyperbolische Geometrie

Aussagen	*Modell*
$(1)(\exists x)(x = 0)$	$\{0\}$
$(2)(\forall x) s(x) \neq 0$	$\{0, s(0)\}$
$(3) x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$	$\{0, s(0), s(s(0)), ...\}$
$(4) \forall x \neq 0 \exists y x = s(y)$	
$(5) x + 1 = s(x), x + s(y) = s(x + y)$	
$(6) x \cdot 1 = x, x \cdot s(y) = x \cdot y + x$	
$(7) x < y \Leftrightarrow (\exists z \neq 0)(x + z = y)$	

Sei $\hat{\mathbb{Z}}$ Ring der Polynomfunktionen $p : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ (übliche Addition und Multiplikation)
Sei $\hat{\mathbb{N}} := \{p \in \mathbb{Z} \mid \text{leitkoeffizient von } p > 0\}$
Definiere Ordnung auf $\hat{\mathbb{Z}}$ (und somit auf $\hat{\mathbb{N}}$) durch $p > q :\Leftrightarrow p - q \in \hat{\mathbb{N}}$
Dann erfüllt $\hat{\mathbb{N}}$ ebenfalls (1)-(7)
$\hat{\mathbb{N}}$ erfüllt Prinzip der vollständigen Induktion nicht hinsichtlich jeder Eigenschaft.
Sei z.B. $E(p)$ die Eigenschaft "p ist Polynom nullten Grades", dann gilt $E(0)$ und $E(p) \Rightarrow E(p+1)$ (Gibt auch Gegenbeispiele in der zugrundeliegenden formalen Sprache)
$\hat{\mathbb{N}}$ erfüllt Prinzip der volständigen Induktion hinsichtlich einer speziellen Eigenschaft

Sei $H : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so definiere Fortsetzung $\tilde{H}$ von H auf $\hat{\mathbb{Z}}$ durch
$[\tilde{H}(q)](n) := H(q(n))$ für $n \in \mathbb{N}$, o.B.d.A. nenne $\tilde{H}$ wieder H.

Ist $H \in \hat{\mathbb{Z}}$ so ist $H(q) \in \hat{\mathbb{Z}}$ für $q \in \hat{\mathbb{N}}$
Sei nun $H \in \hat{\mathbb{Z}}$ so, dass $H(0) = 0 \wedge [H(q) = 0 \Rightarrow H(q+1) = 0]$ für alle $q \in \hat{\mathbb{N}}$, dann gilt
$H(0) = 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}[H(n) = 0 \Rightarrow H(n+1) = 0] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} H(n) = 0 \Rightarrow \forall q \in \hat{\mathbb{N}} H(q) = 0$

Was nützt solch eine Eigenschaft?
Beispiel: $F(n) = 6 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} i^2$, $G(n) = 2n^3 + 3n^2 + 1$, $H(n) = F(n) - G(n)$
Es gilt $H(0) = 0 \wedge [H(q) = 0 \Rightarrow H(q+1) = 0]$, also $\forall q \in \hat{\mathbb{N}}$ ist $H(q) = 0 \Rightarrow \forall q \in \hat{\mathbb{N}} F(q) = G(q)$

Sei $\hat{\mathbb{Q}}$ Menge alles Brüche von Elementen aus $\hat{\mathbb{Z}} \text{mod} \frac{p}{q} = \frac{v}{s} \Leftrightarrow ps = rq$
Setzen $N := v \mapsto v$, $\forall n \in \mathbb{N} : N > n$
$\delta := \frac{1}{N}$, $\forall n \in \mathbb{N} : \delta < \frac{1}{n}$, so gilt: $\delta \cdot N = 1$
Also

$$\sum_{i=0}^{N} (\delta i)^2 \delta = \delta^3 \sum_{i=0}^{N} i^2 = \delta^3 \frac{F(n)}{6} = \delta^3 \frac{G(n)}{6} = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6N^3} = \frac{1}{3} + \frac{3N^2 + N}{6N^3}$$

Wenn wir jedes $q \in \hat{\mathbb{Q}}$ sodass $\forall n \in \mathbb{N} : |q| < \frac{1}{n}$ als vernachlässigbar klein betrachten und dafür $q \approx 0$ und für $x \in \hat{\mathbb{Q}}$ beliebig, $q \approx 0$ schreiben $x + q \approx x$, so erhalten wir $\frac{3N^2+N}{6N^3} \approx 0$ und des weiteren

$$\frac{1}{3} \approx \sum_{i=0}^{N-1} (\delta i)^2 \delta < \int_0^1 x^2 dx < \sum_{i=0}^{N-1} (\delta(i+1))^2 \delta = \sum_{i=1}^{N} (\delta i)^2 \delta \approx \frac{1}{3}$$

Betrachte $\{\delta i \mid i = 0, 1, ..., N\}$ - wie sieht diese Menge aus ("Unendlich nahe an 0")? $\bigcup \{\delta i \mid i \in X\}$, $X := \{x - n \mid n \in \mathbb{N}\}$? ("Unendlich nahe an 1")

Erhalten $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$: $< a_n >_{n \in \mathbb{N}} \sim < b_n >_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow ...$
Betrachte Folgen $< a_n >_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$
Mögliche Äquivalenzrelation: $< a_n >_{n \in \mathbb{N}} \sim < b_n >_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_n)$, erhalte $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$< a_n >_{n \in \mathbb{N}} + < b_n >_{n \in \mathbb{N}} = < a_n + b_n >_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ nicht nullteilerfrei!
Sei $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ eine endlich additive Mengenfunktion, die nur die Werte 0 und 1 annimmt.
$< a_n >_{n \in \mathbb{N}} \sim_m < b_n >_{n \in \mathbb{N}} :\Leftrightarrow m(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\}) = 1$
$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid m(F) = 1\}$ ist ein Ultrafilter ($F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$)
$(1, 0, 1, 0, 1, ...) \cdot (0, 1, 0, 1, ...) = (0, 0, 0, 0, ...)$ - Um Nullteilerfreiheit zu erhalten, zeige: falls $< a_n > \cdot < b_n > = < a_n b_n > \sim_m < 0, 0, 0, ... >$, dann folgt $< a_n > \sim_m < 0, 0, 0... > \vee < b_n > \sim_m < 0, 0, ... >$
$m(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n b_n = 0\}) = 1$, $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n b_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = 0\}$, da $m \to \{0, 1\}$ können nicht beide Mengen Maß 0 haben, also hat eine von beiden Maß 1 (endlich additiv) $\Rightarrow$ Nullteilerfrei!

0. Interne Mengenlehre (IST)

Wir erweitern die übliche Sprache der Mengenlehre ($\in$-Sprache) um ein weiteres einstelliges Prädikat *st* welches wir "standard" nennen. Wir sagen, dass eine Formel unserer

$st-\in$-Sprache *intern* ist, falls die Formel eine Formel der $\in$-Sprache ist, d.h. falls die Formel das Prädikat st nicht enthält.
Sei F eine Formel welche die freien Variablen $x_1...x_n$ enthält und keine anderen freien Variablen. Wir nennen F eine *Standard-Formel*, falls F eine interne Formel ist und $st(t_1), ..., st(t_n)$ für eine spezifische Belegung für $x_1, ..., x_n$.
Eine Formel welche nicht intern ist nennen wir extern.

Bemerkung Da Theoreme keine freien Variablen enthalten sind alle Theoreme standard Formeln
Anstelle von $\forall x st(x) \to F(x)$ schreiben wir $\forall^{st} x F(x)$, analog mit $\exists$

Das Axiomensystem von IST besteht aus den ZFC-Axiomen und drei weiteren Axiomen:
Transfer (T): Für jede standard Formel $\forall x F(x)$ gelte:

$$\forall x F(x) \leftrightarrow \forall^{st} x F(x)$$

Bemerkung Negation beider Seiten gibt $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists^{st} x F(x)$
(sofern $\exists x F(x)$ eine standardformel ist)
Mathematische Objekte x welche in ZFC eindeutig bestimmt sind müssen standard sein.
Folglich: $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{R}, 0, 1, \pi, e, [0,1]^{\mathbb{R}}$ etc. sind alle standard.
Falls x ein standard Objekt und f eine standard Funktion bezeichnet und $x \in dom(f)$, dann ist $f(x)$ standard

Bemerkung Insbesondere erhalten wir für natürliche Zahlen n $st(n) \Rightarrow st(n+1)$

Idealisierung (I): Für jede interne Formel $B(x,y)$ gilt

$$[\forall^{st} Y (Y \text{ ist endlich} \to \exists x \forall y \in Y B(x,y))] \leftrightarrow [\exists x \forall^{st} y B(x,y)]$$

Bemerkung Wenn wir beide Seiten negieren so erhalten wir
$[\exists^{st} Y (Y \text{ ist endlich} \wedge \forall x \exists y \in Y C(x,y)) \leftrightarrow [\forall x \exists^{st} y C(x,y)] \quad (1)$

Satz 0.1 Wenn wir $B(x,y) \equiv x \in E \wedge x \neq y$, dann impliziert (I):
$[E$ ist standard und endlich$] \leftrightarrow [x \in E \to st(x)]$ (2)

> *Beweis:* Sei $C(x,y) \equiv \neq B(x,y) \equiv (x \notin E \vee x = y)$, dann wird die rechte Seite von (1) zu $\forall x \exists^{st} y (x \notin E \vee x = y)$ (3)
> und (3) ist äquivalent zur rechten Seite von (2).

($\Rightarrow$) Wähle $Y = E$, dann impliziert die linke Seite von (2) die linke Seite von (1). Da die rechte Seite von (1) und die reche Seite von (2) äquivalent sind folgt aus (1) die Implikation $\Rightarrow$ in (2).
($\Leftarrow$) Auf der rechten Seite von (2) erhalten wir die rechte Seite von (3). Dies impliziert wegen (1):
$\exists^{st} Y(Y$ ist endlich $\wedge \forall x \exists y \in Y(x \notin E \vee x = y)$, d.h. es gibt eine standard endliche Menge Y mit $E \subset Y$, d.h. E ist endlich und $E \in \mathcal{P}(Y)$. Da $\mathcal{P}(Y)$ wieder endlich ist und (transfer) standard ist, ist E wegen ($\Rightarrow$) auch standard

□

Bemerkung Wenn wir $0 \notin 0, st(0)$ annehmen (z.B. $0 = \varnothing$) und $n := \{0, 1, ..., n-1\}$ (mittels Induktion beweisen, dass $n \notin n$ gilt) erhalten wir aus Satz 0.1:
$[n \in \mathbb{N} \wedge st(n)] \leftrightarrow [m < n \rightarrow st(m)]$

Bemerkung wegen Satz 0.1 muss jede unendliche Menge auch nichststandard-Elemente enthalten
J unendlich $\Rightarrow ((\exists x \in J)\neg st(x))$. Die impliziert $\exists n \in \mathbb{N} \neg st(n)$ und wegen voriger Bemerkung gilt $[m, n \in \mathbb{N} \wedge st(m) \wedge \neg st(n)] \Rightarrow m < n$

Bemerkung Das Prädikat st ist nicht Mengenbildend. Insbesondere bilden die standard natürlichen Zahlen keine Menge:
Falls $\underline{\mathbb{N}} \equiv \{n \in \mathbb{N} \wedge st(n)\}$ der standard natürlichen Zahlen existiert, so auch $\overline{\mathbb{N}}$ der nichtstandard natürlichen Zahlen. Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet folgt $\overline{\mathbb{N}}$ besitzt kleinstes Element ν, d.h. $\neg st(\nu), st(\nu - 1)$ widerspricht $st(n) \rightarrow st(n+1)$ ↯

Bemerkung Falls mit $B(x, y) = (y \in x \wedge x \text{ ist endlich})$ dann erhalten wir aus (I), dass: Es gibt eine endliche Menge F welche alle Standardmengen als Element enthält:
$\exists F \forall^s ty \; y \in F$
Sei E eine beliebige Menge, so ist $E \cap F$ eine endliche Menge, die alle Standardelemente von E enthält

Standardisierung (S): Für jede Formel $F(x, y)$ (intern oder extern) gilt:

$$\forall^{st} \mathcal{E} \exists^{st} S_F \forall^{st} x[x \in S_F \leftrightarrow x \in \mathcal{E} \wedge F(x)]$$

Bemerkung Da eine Menge durch ihre Elemente eindeutig bestimmt ist, ist (wegen (T)) eine Standardmenge eindeutig durch ihre Standardelemente festgelegt. Folglich ist die Menge S_F welche durch das Standardisierungsaxiom gegeben ist eindeutig bestimmt.

Wir nennen S_F die Standardisierung der (internen oder externen) Menge aller $x \in \mathcal{E}$ für welche $F(x)$ gilt und bezeichnen diese Menge mit ${}^S\{x \in \mathcal{E} \mid F(x)\}$

Satz 0.2 Seien X und Y standard und sei $A(x,y)$ eine beliebige IST-Formel. Dann gilt:

$$\forall^{st} x \in X \exists^{st} y \in Y A(x,y) \Leftrightarrow \exists^{st}(f : X \to Y) \forall^{st} x A(x, f(x))$$

Beweis:($\Leftarrow$) trivial (mittels (T))
($\Rightarrow$) Definieren für jedes standard $x \in X$ eine Menge
$t_x := {}^S\{y \in Y \mid A(x,y)\} \in \mathcal{P}(Y)$. Sei weiter
$T := {}^S\{(x,t_x) \mid x \in X\} \subset X \times \mathcal{P}(X)$. Da $t_x \neq 0$ für standard $x \in X$ nach Vorraussetzung und da t_x eindeutig bestimmt ist und T eine standard Menge ist:
$\forall^{st} x \exists ! t \neq \varnothing (x,t) \in T \Leftrightarrow \forall x \exists ! t \neq \varnothing (x,t) \in T$
d.h. wir haben eine standard Funktion $T : X \to \mathcal{P}(Y) \setminus \{\varnothing\}$ definiert, so dass $\forall^{st} x \in X \; T(x) = t_x$. Anwendung des Auswahlaxioms liefert eine Funktion $\exists (f : X \to Y) \forall x \in X \; f(x) \in T(x)$ und mittel (T) folgt $\exists^{st}(f : X \to Y) \forall x \in X f(x) \in T(x)$

□

Satz 0.3 Sei $\phi(x,y,z,w)$ eine interne Formel mit allen Parametern außer x,y,z,w standard. Seien X, Y und W standard. Dann gilt:

$$(\forall^{st} x \in X \exists y \in Y \exists^{st} z \forall^{st} w \in W \phi(x,y,z,w)) \leftrightarrow (\exists f \in Y^X \forall^{st} x \in X \exists^{st} z \forall^{st} w \in W \phi(x, f(x), z, w))$$

Beweis:($\Leftarrow$) trivial.
($\Rightarrow$)Sei $W_{00} \subset W$ endlich und so, dass $\forall^{st} w \in W \; w \in W_{00}$
$[(\forall^{st} x \in X \exists y \in Y \exists^{st} z \forall^{st} w \in W) \phi(x,y,z,w)]$
$\Leftrightarrow [(\forall^{st} x \in X \exists^{st} z \forall^{st-fin} W_0 \in \mathcal{P}(W) \exists y \in Y \forall w \in W_0) \phi(x,y,z,w)]$
$\Leftrightarrow [(\forall x \in X \exists z \forall^{fin} W_0 \in \mathcal{P}(W) \exists y \in Y \forall w \in W_0) \phi(x,y,z,w)]$
$\Leftrightarrow [\forall x \in X \exists z \exists (f : fin(W^2) \to Y) \forall^{fin} W_0 \in \mathcal{P}(W) \forall w \in W_0) \phi(x, f(W_0), z, w)$
Auswahlaxiom
$\Leftrightarrow [\exists (h : X \to \{g : fin(\mathcal{P}(W)) \to Y\}) \forall x \in X \exists z \forall^{fin} W_0 \in \mathcal{P}(W) \forall w \in W_o) \phi(x, [h(x)](W_0), z, w)] \Leftrightarrow [\exists^{st}(h$ " " $\forall^{st} x \in X \exists^{st} z$ " "
$\Rightarrow [\exists^{st}(h : X \to G := \{f : fin(\mathcal{P}(W)) \to Y\}) \forall^{st} x \in X \exists^{st} z \forall^{st} w \in W \phi(x, [h(x)](W_{00}), z, w)$
$\Leftrightarrow [(\exists (f : X \to Y) \forall^{st} x \in X \exists^{st} z \forall^{st} w \in W) \phi(x, f(x), z, w)$

□

Definition 0.1 Wir nennen eine interne Menge Y (Menge in IST) *bounded*, falls eine standard Menge X existiert mit $Y \in X$

Satz 0.4 X ist bounded, falls $\exists^{st} Y$ mit $X \subset Y$

Beweis: $\Rightarrow$: $X \in Y$ impliziert $X \subset Z$ mit $Z = \bigcup Y$
$\Leftarrow$: $X \subset Z$ impliziert $X \in Y$ mit $Y = \mathcal{P}(Z)$ mit Z standard $\Rightarrow Y$ standard

$\square$

Satz 0.5 Sei X bounded und $\phi(x)$ eine beliebige Formel. Dann existiert die Standardisierung ${}^S X = {}^S \{x \in X\}$ und

$$\forall^{st} x \in X \phi(x) \leftrightarrow \forall^{st} x \in {}^S X \ \phi(x)$$

Beweis: X bounded $\Rightarrow X \subset Z$ mit Z standard für geeignetes Z. Also $x \in X \leftrightarrow x \in X \wedge x \in Z$ und aus (S) folgt ${}^S \{x \in X \mid x \in Z\}$ existiert und ist standard und ihre Standard-Elemente stimmen mit jenen von X überein, also existiert ${}^S X$

$\square$

Bemerkung Die Formel $\forall^{st} x \in X \ \phi(x)$ enthält den Parameter X, welcher möglicherweise nicht standard ist. Falls alle Parameter in $\phi(x)$ (bis auf x) standard sind, dann besitzt $\forall^{st} x \in {}^S X \ \phi(x)$ nur standard Parameter. Vermöge (T) ist dies äquivalent zu $\forall x \in {}^S X \ \phi(x)$

Satz 0.6 Sei $\phi(x, y, z, w)$ eine interne Formel mit allen Parametern außer x, y, z, w standard. Sei X standard und $\tilde{Y}, \tilde{W}$ bounded. Seien Y, W standard mit $\tilde{Y} \subset Y$ und $W = {}^S \tilde{W}$. Dann gilt:

$$\forall^{st} x \in X \exists y \in \tilde{Y} \exists^{st} z \forall^{st} w \in \tilde{W} \ \phi(x, y, z, w)$$

$$\Rightarrow \forall^{st} x \in X \exists y \in Y \exists^{st} z \forall^{st} w \in W \ \phi(x, y, z, w)$$

$$\Rightarrow \exists^{bd} f \wedge dom(f) = X \forall^{st} x \in X \exists^{st} z \forall^{st} w \in \tilde{W} \ \phi(x, f(x), z, w)$$

Beweis: Die erste Implikation ist klar, da $\tilde{Y} \subset Y$ und $st(w) \rightarrow [w \in W \leftrightarrow w \in \tilde{W}]$. Die zweite Implikation folgt durch Anwendung von Satz 0.3

$\square$

Definition 0.2 Sei X topologischer Raum und $A \subset X$. Wir definieren den topologischen *Halo* $hal(A)$ von A durch

$$y \in hal(A) :\Leftrightarrow \forall^{st} U \in \mathcal{U}_A y \in U$$

Wobei $\mathcal{U}_A := \{U \mid U \text{ offen und } A \subset U\}$.
Weiters definieren wir $hal(x) := hal(\{x\})$, falls $x \in X$

Bemerkung $hal(A)$ ist im Allgemeinen keine Menge im Sinne von IST und $x \in hal(A)$ nur eine andere Schreibweise für $\forall^{st} U \in \mathcal{U}_A y \in U$

Definition 0.3 Extern definierte Ausdrücke wie $hal(x)$ sind nicht Teil der Sprache von IST. Wir verwenden jedoch diese Ausdrücke als Abkürzungen für die entsprechenden IST-Ausdrücke.

Lemma 0.1Robinsonsches Folgenlemma Sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, so dass $\forall^{st} n \in \mathbb{N}\ x_n \in hal(0)$. Dann gilt:

$$\exists \nu \in \mathbb{N}\ \neg st(\nu) \wedge (\forall n \leq \nu x_n \in hal(0))$$

Beweis: Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, so dass $n \in \mathcal{N} \leftrightarrow \sup_{0 \leq m \leq n} |x_m| \leq \frac{1}{n}$. Dann gilt $\underline{\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ nach Vorraussetzung.
Da $\underline{\mathbb{N}}$ keine interne Menge ist, aber $\mathcal{N}$ sehr wohl, und Mengen durch ihre Elemente bestimmt werden: $\exists \nu \in \mathcal{N} \setminus \underline{\mathbb{N}}$.

$$\exists \nu (\nu \in \mathcal{N} \wedge \nu \in \underline{\mathbb{N}} \wedge \sup_{0 \leq m \leq \nu} |x_m| < \frac{1}{\nu})$$

$\square$

Bemerkung Das nun folgende ist als Nelsonscher Übersetzungs-Algorithmus bekannt. Dieser übersetzt gewisse IST-Formeln in äquivalente ZFC-Formeln. Da wir Satz k hierfür benötigen ist wichtige Vorraussetzung, dass Quantifizierungen über Standard Mengen erfolgen.
Wir sagen: Eine Formel ist vom Rang j, falls es j interne Quantoren $(\exists, \forall)$ gibt so dass rechts von diesen ein externer Quantor folgt und j mit dieser Eigenschaft maximal ist.

1. Ersetze alle extern definierten Ausdrücke durch ihre Definition bis das einzige in der Formel vorkommende externe Prädikat $st()$ ist.
2. Schreibe die Formel um so, dass st nur in externen Quantoren vorkommt, d.h. ersetze $st(x)$ durch $\exists^{st} y (y \doteq x)$
3. Transformiere die Formel in Pränex-Normalform
4. Sei die Formel vom Rang j und q_i der am weitersten rechts stehende interne Quantor welcher durch einen externen gefolgt wird. O.B.d.A. sei $q_i = \exists$. Benutze Satz k und geordnete Tupel um die Formel in die Form

   $$q_1 x_1, ..., q_{i-1} x_{i-1} \exists x_i \exists^{st} y \forall^{st} z\ B(x_1, ..., x_i, y, z)$$

   zu bringen, wobei B intern ist. Tausche $\exists x_i$ und $\exists^{st} y$ und wende (I) an:

   $$q_1 x_1, ..., q_{i-1} x_{i-1} \exists^{st} y \forall^{st, fin} Z \exists x_i \forall z \in Z B(x_1, ..., x_i, y, z)$$

   Somit ist der Rang der Formel reduziert.

5. Wiederhole, bis der Rang $= 0$ ist. (Die Formel ist durch Tupelschreibweise auf die Form $\exists^{st}\forall^{st} z B(y,z)$ mit B intern zu bringen)

6. Ersetze alle freien Variablen durch standard Parameter und wende (T) an.

Bemerkung $y \in hal(x) \Rightarrow hal(y) \subset hal(x)$, da jede offene standard-Umgebung U um x auch Umgebung von y ist.
Analog: $B \subset hal(A) \Rightarrow hal(B) \subset hal(A)$
Falls $x \in X$ standard und X ein T_1 Raum, dann gilt $x \neq y \Rightarrow x \notin hal(y)$, da $X \setminus \{x\}$ offen und standard ist.
Analog: Falls $A, B \subset X$ und A abgeschlossen und standard, so gilt: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap hal(B) = \varnothing$

Satz 0.7 Sei A eine Teilmenge (interne Teilmenge) eines standard topologischen Raumes X, so existiert $V \subset X$ offen mit $A \subset V \subset hal(A)$

*Beweis:*Sei $\mathcal{U}_A$ die Familie aller offenen Mengen U mit $A \subset U$. Es sei $F \subset \mathcal{U}_A$ endlich und so, dass F alle standard Elemente von $\mathcal{U}_A$ enthält (F existiert nach irgendnem Satz). Sei $V = \bigcap F$, dann ist V als endlicher Schnitt offener Mengen offen und $V \supset A$. Weiters gilt $V \subset hal(A)$

□

Satz 0.8 Sei X ein standard topologischer Raum $Y \subset X$ standard und $x_0 \in X$ standard. Dann ist x ein innerer Punkt von Y (d.h. $\exists V \subset Y$, V offen mit $x \in V$) genau dann wenn $hal(X) \subset Y$

Beweis: ($\Rightarrow$) x_0 innerer Punkt von Y, d.h. es existiert U offen mit $x_0 \in U \subset Y$. Da x_0 und Y standard impliziert dies $\exists^{st} U, U$ offen $x_0 \in U \subset Y$, impliziert weiter $hal(x_0) \subset Y$
($\Leftarrow$) $hal(x_0) \subset Y$ impliziert wegen Satz 0.7 $\exists U$ offen: $x_0 \in U \subset hal(x_0) \subset Y$

□

Korollar Eine standard Teilmenge Y eines standard topologischen Raumes X ist offen genau dann wenn $x \in Y \Rightarrow hal(x) \subset Y$

Satz 0.9 Sei Z eine Teilmenge eines standard topologischen Raumes X. Sei $x \in X$, dann gilt $hal(x) \cap Z \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall^{st} U \in \mathcal{U}_{\{x\}}\ Z \cap U \neq \varnothing$

Beweis: ($\Rightarrow$) gilt, da $U \in \mathcal{U}_x \wedge st(U) \Rightarrow hal(x) \subset U$
($\Leftarrow$) Für jede standard endliche Teilmenge $\mathcal{W} \in \mathcal{U}_x$ gilt $\bigcap \mathcal{W} \cap Z \neq \varnothing$. Wegen

(I) existiert $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_x$ endlich mit $\forall^{st} U(U \in \mathcal{U}_x \to U \in \mathcal{F})$ und $\underbrace{\bigcap \mathcal{F}}_{V} \cap Z \neq \varnothing$

und V ist offen und $x \in V$. Weiters $hal(x) \cap Z \supset V \cap Z \neq \varnothing$

□

Korollar Eine standard Teilmenge Y eines standard topologischen Raumes ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall^{st} x \in X hal(x) \cap Y \neq \varnothing \to x \in Y$

Definition 0.4 Sei $F \subset X$ und X ein standard topologischer Raum. Definiere den (standard) *Schatten* ${}^\circ E$ von E durch ${}^\circ E = {}^S\{x \in X \mid hal(x) \cap E \neq \varnothing\}$

Satz 0.10 Der Schatten ${}^\circ E$ jeder Teilmenge E eines standard topologischen Raumes X ist in X abgeschlossen

Beweis: Da ${}^\circ E$ standard genügt es nach obigem Korollar zu zeigen, dass $\forall^{st} x(x \in {}^\circ E \Rightarrow hal(x) \cap {}^\circ F = \varnothing)$. Für jedes standard $x \notin {}^\circ E$ existiert eine standard offene Umgebung U von x mit $U \cap F = \varnothing$. Da $y \in U \Rightarrow hal(y) \subset U$ erhalten wir: $\forall^{st} y\ (y \in {}^\circ E \to y \notin U)$. Wende (T) an und erhalte $\forall y(y \in {}^\circ E \to y \notin U)$ und damit weiter, dass $hal(x) \cap {}^\circ E \subset U \cap {}^\circ E = \varnothing$

□

Satz 0.11 Sei X standard topologischer Raum und $A \subset X$ (A ist interne Teilmenge). Dann ist $hal(A) = \bigcup_{x \in A} hal(x)$ (wobei weder $hal(A)$ noch $hal(x)$ im Allgemeinen interne Mengen sind)

Beweis: $A \supset E \Rightarrow hal(A) \supset hal(E)$ und daraus folgt $hal(A) \supset \bigcup_{x \in A} hal(x)$
Sei $\mathcal{U}$ die Familie aller offenen Teilmengen von X. Nach Bemerkung gilt $\exists^{st} \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}(\mathcal{U}_0$ ist endlich $\wedge \forall x \in A \exists U \in \mathcal{U}_0(x \in U \wedge y \notin U) \Leftrightarrow \forall x \in A \exists^{st} U \in \mathcal{U}(x \in U \wedge y \notin U)$ Die rechte Seite davon ist für jedes $y \notin \bigcup_{x \in A} hal(x)$ erfüllt, daher auch die linke Seite.
Sei $V = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_0 \mid y \notin U\}$. Dann ist V als standard endliche Vereinigung von standard Mengen selbst standard. Weiters gilt: $A \subset V \not\ni y$ und daher $y \notin hal(a)$. Da $y \notin \bigcup_{x \in A} hal(x)$ folgt $hal(A) \subset \bigcup_{x \in A} hal(x)$

□

Satz 0.12 Sei X ein standard topologischer Raum und $B \subset X$ interne Teilmenge. Sei $\mathcal{C}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von X. Dann $\forall^{st} F \in \mathcal{C}(B \subset F \to {}^\circ B \subset F)$. Weiters ist ${}^\circ B$ die (eindeutige) maximale standard Menge mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Sei F eine standard abgeschlossene Menge mit $B \subset F$. Dann $\forall^{st} x(hal(x) \cap B \neq \varnothing \to x \in F)$ (wegen Korollar bla). Nach Definition von ${}^\circ B$ folgt $\forall^{st} x(x \in {}^\circ B \to x \in F)$ und mit (T) folgt (da ${}^\circ B$ und F standard) $(x \in B_0 \to x \in F$ d.h. $B_0 \subset F$.
Bleibt $\not{Z}\,{}^\circ B$ maximal. Dazu zeigen wir: für jedes standard $x \notin {}^\circ B$ existiert ein standard $F \in \mathcal{C}$ mit $x \notin F$ und $F \supset {}^\circ B$. Sei $x \notin {}^\circ B$, so gilt $hal(x) \cap B = \varnothing$ (und x standard) d.h. $\forall y \in B \exists^{st} U \in \mathcal{U}(y \notin U \wedge x \in U)$. Anwendung von Bemerkung gibt $\exists^{st} \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}(\mathcal{U}$ endlich$\wedge \forall y \in B \exists U \in \mathcal{U}_0 (y \notin U \wedge x \in U))$
Sei $V = \bigcap \{U \in \mathcal{U}_0 \mid x \in U\}$, so ist V eine standard offene Menge mit $x \in V$ und $V \cap B = \varnothing$ und $F = X \setminus V$ ist standard abgeschlossen so dass $X \notin F \supset B \Rightarrow x \notin F \supset {}^\circ B$

□

Satz 0.13 Charakterisierung der Kompaktheit Sei X ein standard topologischer Raum, so gilt: X ist kompakt $\Leftrightarrow \forall y \in X \exists^{st} x \in X(y \in hal(x))$, d.h. ($y \in O$ für alle standard offenen Umgebungen von x)
X ist kompakt falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat
X ist kompakt falls für jede Familie abgeschlossener Mengen $A \subset X$ welche die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt $\bigcap A \neq \varnothing$

Beweis: Sei $\mathcal{O}$ die Familie aller offenen Teilmengen von X und $\mathcal{A}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von X.
$\mathcal{O}$ und $\mathcal{A}$ sind standard, weil X standard.
($\Rightarrow$) Indirekt: Angenommen $\forall^{st} x \in X \exists^{st} O_x \in \mathcal{O}\ x \in O_x \not\ni y$ und es sei $A_x = X \setminus O_x$, so gilt $\forall^{st} x \in X \exists^{st} A_x \in \mathcal{A}\ x \notin A_x \ni y$. Folglich $\forall^{st} x \exists^{st} A_x \in \mathcal{A} x \in A_x \forall^{st} X_0 \subset X\ X_0$ endlich $\bigcap_{x \in X_0} A_x \neq \varnothing$. Also existiert eine standardfunktion $f : X \to \mathcal{A}$ so dass $\forall^{st} x \in X\ x \notin f(x) \wedge \forall^{st} X_0 \subset X\ X_0$ endlich $\bigcap\limits_{x \in X_0} f(x) \neq \varnothing$
Anwendung von (T) gibt: $\forall x \in X\ x \notin f(x) \wedge \forall X_0 \subset X\ X_0$ endlich $\bigcap\limits_{x \in X_0} f(x) \neq \varnothing$. D.h. $\{f(x) \mid x \in X\} \subset \mathcal{A}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft. Wegen der Kompaktheit von X folgt $\bigcap\limits_{x \in X} f(x) \neq \varnothing$ - widerspruch zu $x \notin f(x)$

□