Clubs und Stationärkram

- **Der Durchschnitt zweier Clubs ist ein Club**
  Abgeschlossen klar; Unbeschränkt: wähle Folge $\gamma < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1...$; Sup liegt in beiden Clubs.

- **Der Durchschnitt von $< cf(\kappa)$ vielen Clubs ist ein Club.**
  Induktion (endlich trivial). Sei $\mu < cf(\kappa)$, dann ist nach IV $D_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta$ für jedes $\alpha < \mu$ unbeschränkt. Definiere
  $$f(\alpha) = \min\{\epsilon \in D_\alpha \mid \epsilon \text{ größer als } \gamma \text{ und alle Elemente von } f[\alpha]\}$$
  Dann liegt $\sup f(\alpha)$ in allen C_β und ist $> \gamma$.

- **κ regulär und überabzählbar: Der Diagonaldurchschnitt $D = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \left\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta\right\}$ von Clubs ist wieder ein Club.**
  Abgeschl.: Sei α Limes von D, $\beta < \alpha$. α ist sup. von Ordinalzahlen $> \beta$ aus D, die also alle in C_β liegen müssen (per def. Diagonaldurchschnitt), also $\alpha \in C_\beta$. Das gilt für alle $\beta < \alpha$, also $\alpha \in D$.
  Unbeschr.: Definiere $f : \omega \to \kappa$ monoton wachsend mit $f(0) = \gamma$ und $f(n+1) \in \bigcap_{\beta<f(n)} C_\beta$. Weil κ regulär ist das n Club, also unbeschränkt und das Sup von f liegt in D.

- **Fodor - κ regulär und überabzählbar; S stationär. Dann ist jede regressive Funktion $S \to \kappa$ auf einer stationären Teilmenge von S konstant.**
  S ist die Diagonalvereinigung der $A_\alpha = \{\beta \in S \mid f(\beta) = \alpha\}$.

- **Solovay** Jedes κ mit überabzählbarer Kofinalität lässt sich in $cf(\kappa)$ viele disjunkte stationäre Teilmengen zerlegen.

- **Silver: κ singulär(!) mit überabzählbarer Kofinalität. Wenn $2^\mu = \mu^+$ für eine stationäre Menge von Kardinalzahlen $\mu < \kappa$, dann $2^\kappa = \kappa^+$.**
  Sei E die stationäre Menge. Wähle monoton steigende Folge $(\kappa_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ von unendlichen Kardinalzahlen mit Sup κ. Dann ist $S = \{\alpha < cf(\kappa) \mid \kappa_\alpha \in E\}$ stationär in $cf(\kappa)$. Definiere für jede Teilmenge A von κ die Funktion $f_A(\alpha) = A \cap \kappa_\alpha$ auf S. Die Funktionen sind fast Disjunkt. Rest wird kompliziert.

Pfeilkram

- $\kappa \longrightarrow (\mu)^n_\nu$ heißt: Zu jeder Abbildung $f : [\kappa]^n \to \nu$ gibt es homogene Teilmenge der Mächtigkeit μ.

- **Satz von Ramsey:** $\omega \longrightarrow (\omega)^n_m$

- $2^{\aleph_0} \not\longrightarrow (\aleph_1)^2_2$, $\kappa \not\longrightarrow (\omega)^\omega_2$
  1.: Sei $\prec$ eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$ und definiere $f : [\mathbb{R}]^2 \to 2$ als $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow (a < b \leftrightarrow a \prec b)$. Eine homogene Teilmenge wäre durch $<$ oder $<^{-1}$ wohlgeordnet, kann also höchstens abzählbar sein.

  2. Sei $\prec$ ne Wohlordnung auf $[\kappa]^\omega$ und $f : [\kappa]^\omega \to 2$ als $f(s) = 0$ gdw $s \prec t$ für jedes $t \in [s]^\omega \setminus \{s\}$. Dann gilt $f(x_0) = 0$ für das $\prec$-kleinste Element x_0. Gäbe es eine unendliche aufsteigende Kette $x_0 \subset x_1 \subset ...$ mit $f(x_n) = 0$, dann gälte $...x_2 \prec x_1 \prec x_0$, widerspruch zur Wohlordnung.

- $\nu \leq \kappa$. Dann gilt $\kappa^+ \longrightarrow (\mu)^n_\nu \Rightarrow (2^\kappa)^+ \longrightarrow (\mu)^{n+1}_\nu$

- **Erdös-Rado** $(\beth_n(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$

Baumkram

- **Baaaauuum:** $T_{(x)} = \{y \mid y < x\}$, $h(x) = otp(T_{(x)})$, $T_\alpha = \{x \in T \mid h(x) = \alpha\}$, $h(T) = \min\{\alpha \mid T_\alpha = \emptyset\}$, $N(x)$ =Menge der direkten(!) Nachfolger.

- **König: Ein unendlicher, endlich verzweigter Baum hat einen unendlichen Pfad. Äquivalent: Es gibt keinen ω-Aronszajnbaum / ω hat die Baumeigenschaft**
  Konstruiere rekursiv den Pfad.

- Ein κ-Aronszajnbaum ist ein Baum der Höhe κ ohne durchgehenden Zweig, bei dem alle Schichten eine kleinere Mächtigkeit als κ haben.

- Es gibt einen ω_1-Aronszajnbaum.

- **wenn es keinen κ-Aronszajnbaum gibt, ist κ regulär.** Ist κ singulär, wähle disjunkte Vereinigung $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha = \kappa \setminus \{0\}$ mit $\gamma, |X_\alpha| < \kappa$. Definiere $\beta_1 <_T \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 < \beta_2$ und β_1, β_2 liegen im selben X_α. Dann hat der Baum einen kofinalen Zweig.

- Wenn κ regulär, $\lambda < \kappa$ und T ein Baum der Höhe κ mit allen Schichten $< \lambda$, dann hat T einen kofinalen Zweig.

- Wenn κ regulär und $2^{<\kappa} = \kappa$, dann gibt es einen κ^+- Aronszajnbaum.

Schwach kompakte

- κ überabzählbar heißt schwach kompakt, wenn $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$
  Äquivalent: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^n_\nu$ für alle $n \in \omega, \nu < \kappa$
  Äquivalent: κ stark unerreichbar und es gibt keinen κ-Aronszajnbaum
  Äquivalent: Für jede Menge von $L_{\kappa,\kappa}$ Sätzen mit höchstens κ vielen nicht-logischen Symbolen folgt aus κ-erfüllbarkeit Erfüllbarkeit.
  Äquivalent: Für jedes $R \subseteq V_\kappa$ gibt es transitives $X \neq V_\kappa$ und $S \subseteq X$ so dass $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$.
  Äquivalent: Π^1_1-unbeschreibbar.

- **Schwach kompakte Kardinalzahlen sind stark unerreichbar**
  Regulär: κ ist disjunkte Vereinigung von $cf(\kappa)$-vielen Menge A_α von kleinerer Mächtigkeit. Setze $f : [\kappa]^2 \to 2$ als $f(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta$ und α liegen nicht im gleichen A_α. Dann gibt es homogenes B der Mächtigkeit $\kappa > |A_\alpha|$ f.a. α, also muss $f[B] = 1$ sein und damit $cf(\kappa) \geq \kappa$.
  Starker Limes: Umständlich.

- Schwach kompakte Kardinalzahlen sind (stark) Mahlo.

Messbar

- $\mathbb{F}$ ist ein Ultrafilter gdw $A \cup B \in \mathbb{F} \Rightarrow A \in \mathbb{F}$ oder $B \in \mathbb{F}$
  Das Bild von nem (Ultra)filter ist wieder ein (Ultra)filter

- Koendliche Mengen erzeugen einen nichttrivialen Ultrafilter

- Ein Ultrafilter heißt κ-Vollständig, wenn der Schnitt von weniger als κ vielen Mengen **nichtleer/im Filter** ist. Äquivalent: Wenn mit $\bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ auch eins der U_α im Filter liegt.
  Bew: Wenn $U_\alpha \in \mathbb{U}$, aber $D = \bigcap U_\alpha \notin \mathbb{U}$, dann $D^C \in \mathbb{U}$, also $A_\alpha \cap D^C \in \mathbb{U}$ und der Schnitt über die ist leer.

- **κ heißt messbar, wenn überabzählbar und es einen nichttrivialen κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt.** Messbare Ultrafilter enthalten nur Mengen der Mächtigkeit κ (i.e. sind uniform), weil sonst Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen, also trivial.

  Äquivalent: Wenn $\kappa = crit(j)$ für ein $j : V \prec M$.
  $crit(j) = \kappa$: Angenommen, $\alpha < \kappa$ minimal mit $j(\alpha) > \alpha$ und $\alpha = [f]$. Dann muss also $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \alpha\} \in U$ gelten. Nach κ-vollst. muss dann für ein β gelten $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \beta\} \in U$. Dann ist aber $\beta < \alpha = [f] = j(\beta) = \beta$, widerspruch.
  Für jedes $\alpha < \kappa$ gilt $\{\xi \mid \alpha < \xi < \kappa\} \in U$. Also $\alpha = j(\alpha) < [id] < j(\kappa)$, also $\kappa < j(\kappa)$.

  $crit(j) = \delta$ ist Messbar: $\delta > \omega$, weil jede Ordinalzahl $\leq \omega$ definierbar. Definiere U auf δ über $X \in U \Leftrightarrow \delta \in j(X)$. Dies ist ein messbarer Ultrafilter (hässliche rechnerei).

- **Messbare Kardinalzahlen sind schwach kompakt**
  Regulär: Sonst ist κ Vereinigung von $< \kappa$ vielen Mengen der Mächtigkeit $< \kappa$, also liegt eine der Mengen im Ultrafilter, widerspruch.

- Ein messbarer Ultrafilter heißt normal, wenn jede regressive Funktion $f : U \to \kappa$ auf $U \in \mathbb{U}$ auf einem $V \in \mathbb{U}$ konstant ist.
  Äquivalent: $\mathbb{U}$ enthält alle Clubs.
  Äquivalent: Wenn $\mathbb{U}$ unter diagonalen Schnitten abgeschlossen ist.
  Angenommen $D = \Delta X_\alpha \notin \mathbb{U}$ für $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa} \subset \mathbb{U}$. Dann ist $U := \kappa \setminus D \in \mathbb{U}$. Definiere $f(\xi) = \min\{\alpha \mid \xi \notin X_\alpha\}$. f ist regressiv auf U, aber für jedes α gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) \cap X_\alpha = \emptyset$.
  Umgekehrt, wenn $f^{-1}(\{\alpha\}) \notin \mathbb{U}$ für jedes α, dann ist $\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\}) =: U_\alpha \in \mathbb{U}$ und damit $U \cap \Delta U_\alpha = \emptyset$, also $\Delta U_\alpha \notin \mathbb{U}$.

  Normale Ultrafilter enthalten die Menge aller schwach kompakten Kardinalzahlen $< \kappa$

- **Auf messbaren Kardinalzahlen gibt es normale Ultrafilter** Sei U ein κ-vollständiger Ultrafilter über κ und $[f]_U = \kappa$. Dann ist das Bild von U unter f normal. (i.e., gdw wenn Urbilder in U liegen...)

- Reellwertig messbare Kardinalzahlen haben keinen Aronszajnbaum.

Kanamori:

- Ein Maß *über* κ ist eine Funktion $m : \mathcal{P}(\kappa) \to [0, 1]$ so, dass $m(\kappa) = 1, m(\{x\}) = 0 \forall x \in \kappa$ und abzählbar additiv. κ ist reellwertig messbar, wenn es ein κ-additives Maß über κ gibt (i.e. vereinigung von *weniger* als κ vielen Mengen...)

- **Ulam-Matrix:** Für jedes λ gibt es eine $\lambda^+ \times \lambda$-Matrix von Teilmengen von λ^+ so, dass die Mengen der gleichen Zeile paarweise disjunkt sind und für die Vereinigung U über eine ganze Spalte gilt: $\left|\lambda^+ \setminus U\right| \leq \lambda$.

- Reellwertig messbar impliziert schwach unerreichbar.
  Regulär: Weil sonst κ Vereinigung von $< \kappa$ vielen Mengen mit Mächtigkeit $< \kappa$.
  Limes: Über Ulam-Matrix.

- Atomfreies κ-additives Maß über κ impliziert $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ und es gibt ein Maß auf $\mathbb{R}$, das das Lebesgue-maß erweitert.
  Beweis über den Baire-Raum.

- **messbar** $\Rightarrow V \neq L$
  Angenommen $V = L$ und κ kleinste messbare Kardinalzahl. Dann ist $\kappa = crit(j)$ für ein $j : V \prec M \cong Ult(V,U)$, also $M \subseteq L$, also $M = L$. "Kleinste messbare Kardinalzahl" ist dann aber absolut und damit $j(\kappa) = \kappa$, widerspruch.

- **Für** $j : V \prec M \cong Ult(V,U)$ **gilt:** $V_\kappa^M = V_\kappa$, $V_{\kappa+1}^m = V_{\kappa+1}$, $\kappa^{+M} = \kappa^+$.
  Folgt in Reihe, weil $j(x) = x$ für alle $x < \kappa$.

- $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$
  Nachdem $\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)$ folgt die erste Ungleichung. Nachdem $j(\kappa)$ stark unerreichbar in M muss gelten $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$. Die letzte Ungleichung folgt, weil $j(\kappa) = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa\}$

- **j fixierte starke Limeskardinalzahlen mit kofinalität** $\neq \kappa$.

- $U \notin M$
  ${}^\kappa\kappa = ({}^\kappa\kappa)^M \in M$. Angenommen $U \in M$, dann wäre die Abbildung $f \in {}^\kappa\kappa \mapsto [f]$ auch in M. Aber dann wäre $j(\kappa) < (2^\kappa)^{+M}$, widerspruch zur Unerreichbarkeit von $j(\kappa)$.

- Wenn $2^\alpha = \alpha^+$ für jedes $\alpha < \kappa$, dann $2^\kappa = \kappa^+$
  $\kappa < j(\kappa)$ und wegen Elementarität $(2^\kappa)^M = \kappa^{+M}$. Es folgt $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M = \kappa^{+M} = \kappa^+$.

- $\phi(\kappa)^M \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \phi(\alpha)\} \in U$ für normalen Ultrafilter U
  $\kappa = [id]_U,\ M \models \varphi(\kappa) \Leftrightarrow M \models \varphi([id]_U) \Leftrightarrow \{\alpha \mid \phi(\alpha)\} \in U$

Transitive Modelle

- $< M, e >$ ist isomorph zu einer transitiven Menge gdw Modell des Extensionalitätsaxioms und e fundiert

- Jede endliche Menge von Formeln wird von beliebig großen V_α reflektiert.

- Δ_0-Formeln sind absolut für transitive Mengen.

- L ist absolut für transitive Modelle $M \supset On$ von ZFC

- Für unendliche α ist $|L_\alpha| = |\alpha|$

- $\mathsf{ZFC} + \mathsf{V} = \mathsf{L} \vdash \mathsf{GCH}$
  Zeige mit Reflektionssatz und Löwenheim-Skolem, dass für jedes κ jedes $a \subset \kappa$ in einem L_β für $\beta < \kappa^+$ liegt. Dann folgt $\mathcal{P}(\kappa) \subset L_{\kappa^+}$ und hat somit höchstens Mächtigkeit κ^+.

- $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L} \vdash \mathsf{AC}$
  $Def(x)$ ist wohlordbar über eine Wohlordnung der (Paare von Forme und Parameter). Dadurch kann rekursiv jedes L_α wohlgeordnet werden.

Elementare Einbettungen

- **Für jede Ordinalzahl** α **gilt** $j(\alpha) \geq \alpha$
  Per Induktion, dadurch, dass "x ist Ordinalzahl" Σ_0 ist.

- $j \neq Id$ **und** $M_1 \subseteq M_0$ **(oder** $M_0 \models \mathsf{AC}$**), dann** $j(\delta) > \delta$ **für ein** δ**.**
  Sei x von minimalem Rang so, dass $j(x) \neq x$ und $\delta = \mathsf{rank}(x)$. Dann ist $y = j(y)$ für jedes $y \in x$ und damit $x \subset j(x)$, also gibt es $z \in j(x) \setminus x$. Angenommen $\mathsf{rank}(j(x)) = \delta$, dann $\mathsf{rank}(z) < \delta$ und (weil $M_1 \subseteq M_0$) $z = j(z) \in j(x)$ und nach Elementarität $z \in x$, widerspruch. Also $\mathsf{rank}(j(x)) = j(\delta) > \delta$.

- **Ultrapotenz:** ${}^S V/U = \{(f)_U^0 \mid f : S \to V\}$, wobei $(f)_U$ die Äquivalenzklasse von $f : S \to V$ ist und $(f)_U^0$ die Elemente aus $(f)_U$ mit minimalem Rang (damit keine echte Klasse).
  Definiere $(f)_U^0 E_U (g)_U^0 \Leftrightarrow \{i \in S \mid f(i) \in g(i)\} \in U$ (wie auch für Gleichheit).
  $Ult(V,U) = \langle {}^S V/U, E_U \rangle$

- U **ist** ω_1**-vollständig gdw** E_U **wohlfundiert ist.**
  Angenommen, es gibt unendliche Folge mit $(f_{n+1})_U^0 E_U (f_n)_U^0$, aber $\bigcap_n \{i \in S \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \neq \emptyset$, dann hätte man ne unendlich absteigende $\in$-Kette.
  Umgekehrt, angenommen es gibt ne Folge X_n in U mit $\bigcap X_n \notin U$, dann definiere $g_k : S \to V$ für $k \in \omega$ über

  $$g_k(i) = \begin{cases} n - k & \exists n \geq k : i \in X_0, ..., X_{n-1} \wedge i \notin X_n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

  Dann gilt für jedes k: $\{i \in S \mid g_{k+1}(i) \in g_k(i)\} \supset \bigcap_{m \leq k} X_m \setminus \underbrace{\bigcap_{n \in \omega} X_n}_{\notin U} \in U$ (in Komplement umschreiben)

  womit $g_{k+1} E_U g_k$ gilt.

Unbeschreibbar

- **κ unerreichbar, dann ist die Menge der $V_\alpha \prec V_\kappa$ ein Club.**
  α_0 beliebig, setze α_{n+1} das kleinste β so dass für jede Formel mit Parametern aus V_{α_n} mit $V_\kappa \models \exists x\varphi$ so ein x in V_β existiert. Weil κ unerreichbar ist $|V_{\alpha_n}| < \kappa$ und damit $\alpha_{n+1} < \kappa$ und weil regulär ist das Supremum über α_n auch $< \kappa$.

- **κ unerreichbar gdw es ein $V_\alpha \prec V_\kappa$ gibt.**
  Regulär: Angenommen, es gibt $f : \beta \to \kappa$ konfinal. Setze $R = \{\beta\} \cup f$. Dann ist β die einzige Ordinalzahl in R und muss bei der Unterstruktur erhalten bleiben, also $\beta \in V_\alpha$ und damit $Im(f) \subset V_\alpha$, widerspruch. Starker Limes: Angenommen, es gibt $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$, also $f : \mathcal{P}(\lambda) \to \kappa$ surjektiv. Setze $R = \{\lambda + 1\} \cup f$, selber widerspruch.
  mahlo gdw es gibt unerreichbare unterstruktur
  Angenommen es gibt Club C der keine unerreichbaren Kardinalzahlen enthält. Setze $R = C$ - wenn C unbeschränkt, dann nach Elementarität auch $C \cap \alpha$ unbeschränkt, also $\alpha \in C$ widerpruch.

- **κ ist Σ/Π^m_n-unbeschreibbar wenn's für jedes $R \subseteq V_\kappa$ und Σ/Π^m_n-Satz φ mit $(V_\kappa, R) \models \varphi$ ein $\alpha < \kappa$ gibt mit $(\langle V_\alpha, V_\alpha \cap R) \models \varphi$**

- **Σ^1_{n+1}-unbeschr. gdw Π^1_n-unbeschr.**
  Wenn $V_\kappa \models \exists X \varphi(X)$ gibt es also nen Zeugen S, nimm als neues Prädikat dazu und wende Π^1_n-unbeschr. auf $\varphi(S)$ an.
  $\Rightarrow$ **Σ^1_1-unbeschr. gdw unerreichbar.**
  Π^1_1-unbeschr. gdw schwach kompakt (Beweis hässlich über Extensionseigenschaft).

- **Messbare Kardinalzahlen sind Π^2_1-unbeschr.**
  Sei $(V_\kappa, R) \models \varphi$. Zeige, dass $\{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \models \varphi\} \in U$ über $(V_\kappa \models \varphi)^M$. Das folgt daraus, dass $V_{\kappa+1} \subseteq M$, also sind zweitstufige Aussagen über V_κ absolut zwischen V und M. Außerdem sind die einzigen Typ3-Quantoren in φ universell, also abwärtserhaltend und $j(R) \cap V_\kappa = R$.

- **U normal über κ messbar, dann $\{\alpha$ total unbeschreibbar$\} \in U$.**
  Zeige (κ total unbeschreibbar)^M: Angenommen $M \models (R \subseteq V_\kappa \wedge (V_\kappa, R) \models \varphi)$, dann ist κ Zeuge für $M \models \exists \alpha < j(\kappa)((V_\alpha, R \cap V_\alpha) \models \varphi)$. Nach Elementarität gilt also $\exists \alpha < \kappa\ \sim$, was wegen $V^M_\kappa = V_\kappa$ wiederum auch in M gelten muss.

- κ Q-unbeschr. $\Rightarrow L \models (\kappa\ Q$-unbeschr.)
  $\Rightarrow$ selbes für schwach kompakt.

- Für $m > 1$: Σ^m_n-unbeschr. ist eine Π^m_n-Formel (in V_κ) und umgekehrt. Π^1_n-unbeschr. ist Π^1_{n+1}-Formel.

- $F_Q = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \setminus X$ ist nicht Q-unbeschr. in $\kappa\}$
  F_Q ist ein Filter gdw κ Q-unbeschr.
  Die F_Q sind normal

- σ^1_1 ist die kleinste unerreichbare
  $\pi^1_n = \sigma^1_{n+1} < \pi^1_{n+1}$
  $m > 1$: $\sigma^m_n \neq \pi^m_n$, $\pi^m_n < \sigma^m_{n+1}, \pi^m_{n+1}$
  $V = L \vdash m > 1 \to \sigma^m_n < \pi^m_n$
  Wenn $m > 1$ und es gibt eine Σ^m_n-unbeschr. Zahl mit einer kleineren Π^m_n unbeschr., dann gibt es eine generische Erweiterung mit $\sigma^m_n > \pi^m_n$.

Ramsey

- Die Erdöszahl $\kappa(\alpha)$ ist das kleinste λ mit $\lambda \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_2$.
  Für $\alpha > \omega$: $\alpha < \beta \Rightarrow \kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$ und $\kappa(\alpha)$ ist regulär.

- κ heißt Ramsey gdw $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_2$.
  Äquivalent: für alle $\gamma < \kappa$ gilt $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_\gamma$
  Ramseykardinalzahlen sind schwach kompakt.

- Falls α Limesordinalzahl, dann ist $\kappa(\alpha)$ unerreichbar und $\kappa(\alpha) \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_\gamma$ für jedes $\gamma < \kappa(\alpha)$

- Es gibt ne total unbeschreibbare unter $\kappa(\omega)$

- Messbare Kardinalzahlen sind Ramsey. Die Menge aller kleineren Ramseyzahlen liegt im (normalen) Ultrafilter.

Partitionskram

- Eine Struktur (A, R) ist vom Typ $\langle |A|, |R| \rangle$.
  $\beta \longrightarrow [\alpha]^\gamma_{\delta, <\eta}$ heißt, für jede Funktion $f : [\beta]^\gamma \to \delta$ gibt es ein $H \in [\beta]^\delta$, so dass f auf $[H]^\gamma$ weniger als η Werte annimmt.
  $\langle \kappa_1, \lambda_1 \rangle \twoheadrightarrow \langle \kappa_2, \lambda_2 \rangle$ heißt: Jede Struktur vom Typ $\langle \kappa_1, \lambda_1 \rangle$ hat eine elementare Unterstruktur vom Typ $\langle \kappa_2, \lambda_2 \rangle$.

- Chang's Conjecture: $\langle \omega_2, \omega_1 \rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, \omega \rangle$

- $\kappa \geq \lambda$ und $\kappa \geq \mu \geq \nu > \omega$. Dann gilt:
  $\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, < \nu \rangle \Leftrightarrow \kappa \longrightarrow [\mu]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$
- Für $n > 1$: $\omega_n \longrightarrow [\omega_1]^{<\omega}_{\omega_1, <\omega_1} \Leftrightarrow \omega_n \longrightarrow [\omega_1]^{n}_{\omega_1, <\omega_1}$. Daraus folgt: Chang's Conjecture gilt gdw $\omega_2 \longrightarrow [\omega_1]^{2}_{\omega_1, <\omega_1}$
- κ ist ν-Rowbottom, wenn $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$ und Rowbottom, wenn ω_1-Rowbottom.
- Wenn es $\kappa > \lambda > \omega$ und $\kappa \geq \mu > \omega$ gibt, dann ist ω_1 unerreichbar in L (also $\mathcal{P}(\omega_1)^L$ abzählbar).
- Wenn κ Ramsey, dann gilt für jedes unendliche $\alpha < \kappa$: $\left|\mathcal{P}(\alpha)^L\right| = |\alpha|$ und damit jede reguläre Kardinalzahl $< \kappa$ unerreichbar in L.
- Ein Singulärer Limes κ messbarer Kardinalzahlen ist $cf(\kappa)^+$-Rowbottom.
- Wenn $2^{<\nu} = \kappa$ und κ ist regulär und ν-Rowbottom, dann gilt für alle $\nu \leq \lambda < \kappa$: $2^\lambda = \kappa$.
- Wenn $2^{<\nu} < \kappa$ und κ ist ν-Rowbottom, dann ist κ ein starker Limes.

Forcing

Prikry Forcing κ fest (messbar), U ein Ultrafilter über κ, dann ist $P = [\kappa]^{<\omega} \times U$ mit der Ordnung $\langle s, A \rangle \leq \langle t, B \rangle$ gdw t ist Anfangsstück von s und $A \cup (s \setminus t) \subseteq B$. Mit dem Forcing kann man die Kofinalität von κ ändern, aber alle Kardinalzahlen erhalten.

Magidor Forcing Erweiterung von Prikry Forcing mit dem allgemein die Kofinalität einer Kardinalzahl auf eine beliebige kleinere reguläre Kardinalzahl geforced werden kann.