LinA I

Vektorraum:

1. $(V,+)$ abelsche Gruppe
2. Distributivgesetz 1: $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$
3. Distributivgesetz 2: $\lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$
4. Assoziativgesetz: $(\lambda\mu)\vec{v}=\lambda(\mu\vec{r})$
5. $1_{\mathbb{K}}\vec{v}=\vec{v}$

Elementarmatritzen:

1. $T_{\ell,k}\cdot A$: Zeilen ℓ,k vertauschen
2. $R_{\ell,k}(\lambda)\cdot A$: ℓ-te Zeile $+\lambda\cdot$ (k-te Zeile)
3. $S_\ell(\lambda)\cdot A$: $\lambda\cdot\ell$-te Zeile

Dual-/Orthogonaler UVR:

$$W\subset V \qquad W^O:=\{f\in V^*:f(w)=0\forall w\in W\}$$

Duale Basis:

$$\{v_1^*...v_n^*\} \qquad v_i^*(v_j)=\delta_{ij}\forall i,j$$

Duale Abbildung:

$$f^*:W^*\mapsto V^*$$

$$\alpha\mapsto\alpha\circ f$$

$$(Mat_B^A(f))^t=Mat_{A^*}^{B^*}(f^*)$$

Gruppenwirkung:

1. $\phi(e,m)=m$
2. $\phi(g,\phi(h,m))=\phi(g\cdot h,m)$

Determinante: Def:

1. Linear in jeder Zeile
2. alternierend ($A_i=A_j\Rightarrow\det(A)=0$)
3. $\det(E_n)=1$

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)})$$

$$A=\begin{pmatrix}B_1 & C\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(B_1)\cdot\det(B_2)$$

$$\det(A)=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\det(A'_{ij})A_{ij}$$

Kleinscheiß:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$f:V\mapsto W \qquad \dim(V)=\dim\ker(f)+\dim\mathrm{Img}(f)$$

LinA II

Jordannormalform:
algebraische Multiplizität$\rightarrow$ dimHau
dimKer$(f-\lambda E_n)$ $\rightarrow$Anzahl Jordanblöcke
$(f-\lambda E_n)^r=0\rightarrow r$ ist Größe des größten Jordanblocks
Minimalpolynom: $P_A=\sum_i(\lambda_i-x)^{r_i}$
r_i ist Größe des größten Jordanblocks

Skalarprodukt:
Positiv definite, symmetrische Bilinearform

$$\langle x,v\rangle=\langle y,v\rangle\Rightarrow x=y$$

Euklidisches Skalarprodukt: $\langle x,y\rangle=x^ty$
Euklidische Norm: $||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}$
Euklidischer Abstand: $d(x,y)=||x-y||$

Orthogonale Vektoren:
$\langle v_1,v_2\rangle=0$

Orthonormalbasis:
$\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$
$v=\sum\lambda_iv_i \qquad \langle v,v_j\rangle=\lambda_j$

Sesquilinearform:
$b:V\times V\mapsto\mathbb{K}$, Linear in der ersten Komponente, Semilinear in der zweiten.
Hermitesch: $b(v,w)=\overline{b(w,v)}\sim$ **Matrix**: $A=\overline{A}^t$
Euklidischer Vektorraum: reell+Skalarprodukt
Unitärer Vektorraum: Komplex+pos.def. Hermitesche Form

Norm: $V\mapsto\mathbb{R}$

1. Halblinear: $||\lambda v||=|\lambda|\cdot||v||$
2. Dreiecksungleichung: $||v+w||\leq||v||+||w||$
3. Positát: $||v||=0\Leftrightarrow v=0$

Metrik: $M\times M\mapsto\mathbb{R}^{\geq0}$

1. Symmetrie
2. Dreiecksungleichung
3. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle v,w\rangle|\leq\sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle w,w\rangle}$$

Orthogonale Projektion: $U\subset V \qquad \{u_1...u_n\}$ Orthonormalbasis

$$v=p(v)+r(v) \qquad p(v)=\sum_{i=1}^n\langle v,u_i\rangle u_i$$

Gram-Schmidt:

$$u'_i=v_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle v_i,u_j\rangle u_j \qquad u_i=\frac{1}{||u'_i||}u'_i$$

Adjungierte Abbildung:

$$f:V\mapsto W \qquad f^{ad}:W\mapsto V$$

$$\langle f(v),w\rangle=\langle v,f^{ad}(w)\rangle$$

Selbstadjungiert: $\langle f(v),w\rangle=\langle v,f(w)\rangle$
$\Leftrightarrow A^t=\overline{A}$ mit Orthonormalbasis (symmetrisch/hermitesch)
Alle Eigenwerte reell, diagonalisierbar

Orthogonale/Unitäre Abbildung:

$$\langle v,w\rangle=\langle f(v),f(w)\rangle$$

$\Rightarrow f^{-1}=f^{ad}$

1. $||v||=||f(v)||$
2. λ Eigenwert $\Rightarrow|\lambda|=1$
3. $v\perp w\Rightarrow f(v)\perp f(w)$
4. injektiv
5. isomorph, f^{-1} orthogonal/unitär

Orthogonale Matrix (O_n)**:** $A^{-1}=A^t$
$SO_n=\{A\in O_n\mid\det(A)=1\}$
Spalten-/Zeilenvektoren haben Länge 1 und $\perp$
Normalformen:

$$\det=1,n=2:\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Drehung, i.A. keine Eigenwerte

$$n>2:\begin{pmatrix}1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & n=2\end{pmatrix}$$

reelle Eigenwerte ±1

$$\det=-1:\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Spiegelung, Eigenwerte ±1

Unitäre Matrix (U_n)**:** $A^{-1}=\overline{A}^t$
$SU_n=\{A\in U_n\mid\det(A)=1\}$
Spalten-/Zeilenvektoren haben Länge 1 und $\perp$
Diagonalisierbar mit Orthonormalbasis

Normaler Endomorphismus:

$$f^{ad}\circ f=f\circ f^{ad}$$

Kleinscheiß:
symmetrisch/hermitisch: pos.def.$\Leftrightarrow$Eigenwerte$>$0
Hurwitz-Kriterium: pos.def.$\Leftrightarrow$ jede obere linke Teilmatrix hat det$>$0