Vorlesungsmitschrift Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Aktueller Stand: 26. Juli 2012

1 Räume, Ringe, Moduln

Sei k ein kommutativer unitärer Ring. Betrachte

$$\begin{aligned} k[T_1, ..., T_n] \times k^n &\to k \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Definition 1.1 I $\subset k[T_1, ..., T_n]$
$\mathcal{Z}(I) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}$
"Nullstellenmenge von I"

Beispiel 1.1 $k = \mathbb{R}$, $n = 2$, $\mathcal{Z}(\{x^2 + y^2 - 1\})$ = Einheitskreis
$k = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}((x^2 + y^2 - 1)xy)$ = Einheitskreis, x-Achse, y-Achse
$\mathcal{Z}(x^2 + y^2 - 1, x)$ = nur noch $(0, 1)$ und $(0, -1)$

Definition 1.2 $Z \subset k^n$, $I(Z) = \{f \in k[T_1, ...T_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in Z\}$
"Verschwindungsideal von Z"
Das ist ein Ideal, weil wenn 2 Funktionen bei all den x verschwinden, dann auch ihre Summe. Genauso, wenn eine Funktion auf der Teilmenge verschwindet, dann verschwindet auch das Produkt des Polynoms mit einem anderen.

Definition 1.3 $Z \subset k^n$ heißt "algebraisch" $\Leftrightarrow \exists A \subset k[T_1, ...T_n]$ so dass $Z = \mathcal{Z}(A)$
Bemerkung: Sei k ein Körper (es geht meistens um Körper und dann auch meistens um algebraisch abgeschlossene), dann gilt Z $\subset$ k algebraisch, genau dann wenn $|Z| < \infty$ oder $Z = k$. $\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathcal{Z}(0)k^n$. Beispielsweise, ist der Wertebereich des Cosinos als Teilmenge der Ebene nicht algebraisch.

Satz 1.1 Sei k ein kommutativer Integritätsbereich. So bilden die algebraischen Teilmengen von k^n abgeschlossene Mengen einer Topologie auf k^n. Diese heißt "Zariski-Toplogie"

Einschub: X Menge, Eine Toplogie auf X ist eine Teilmenge der Potenzmenge $T \subset \mathcal{P}(X)$, so dass gilt:

1. T ist stabil unter endlichen Schnitten: $U, V \in T \Rightarrow U \cap V \in T$ und $X \in T$
2. T ist stabil unter beliebigen Vereinigungen: $U \subset T \Rightarrow \bigcup U \in T$ und $\emptyset \in T$

Die Elemente von T heißen die "offenen Teilmengen von X"

Beispiel 1.2 Die offenen Teilmengen eines metrischen Raums X bilden eine Topologie.

Definition 1.4 (X, T) sei ein topologischer Raum. $A \subset X$ heißt abgeschlossen gdw $X \setminus A$ offen. Weiß man also in einer Topologie was die offenen Mengen sind, kennt man auch die abgeschlossenen und umgekehrt.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass das System $A \subset P(k^n)$ der algebraischen Teilmengen stabil ist unter endlichen Vereinigungen und beliebigen Schnitten. (Gerade umgekehrt, weil es hier um die *abgeschlossenen* geht, in der Definition sind aber *offene* gegeben)

$$\bigcap_{I \in J} \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\bigcup_{I \in J} I)$$
$$J \subset P(k[T_1, ..., T_n])$$

Denn der Schnitt aller Nullstellenmengen der Polynome, ist ja gerade die Menge der Nullstellen der Vereinigung aller Polynome

$$\mathcal{Z}(I_1) \cup \mathcal{Z}(I_2) = \mathcal{Z}(fg | f \in I_1, g \in I_2)$$

$\subset$: Wenn eines von beiden verschwindet, dann natürlich auch das Produkt
$\supset$: Wenn $x \notin \mathcal{Z}(I_1) \cup \mathcal{Z}(I_2) \rightarrow \exists f \in I_1, g \in I_2 \Rightarrow (fg)(x) \neq 0 \rightarrow x \notin \mathcal{Z}(fg | f \in I_1, g \in I_2)$ $\emptyset = \mathcal{Z}(1)$ Denn nicht Nullring und Integritätsbereich.
$k^n = \mathcal{Z}(\emptyset)$

□

Hilbertscher Nullstellensatz Teil 1

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper ($k = \overline{k}$). Sei $I \subset k[T_1, ..., T_n]$ ein Ideal und $f \in k[T_1, ..., T_n]$.
$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I) \to \exists N \in \mathbb{N}$ mit $f^N \in I$

Gegenbeispiel: $k = \mathbb{R}$ $\mathcal{Z}(1) = \emptyset = \mathcal{Z}(1 + T^2)$ aber $1^N \neq 1 + T^2 \forall N$ Also ist der HN in den reellen Zahlen schlicht falsch.

Konsequenzen aus dem HN $I \subsetneq k(T_1, ..., T_n] \Leftrightarrow 1^N \notin I \Rightarrow \mathcal{Z}(1) \subsetneq \mathcal{Z}(I) \Rightarrow \mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$
Sie k ein Kring

$$\begin{aligned} I \subset k[k[T_1, ..., T_n] \text{ und } \mathcal{Z}(I) = \emptyset \Rightarrow k[T_1, ..., T_n] \\ A \subset B \subset k^n \Rightarrow I(A) \supset I(B) \\ I \subset J \subset k[T_1, ..., T_n] \Rightarrow \mathcal{Z}(I) \supset \mathcal{Z}(J) \\ A \subset k^n, \mathcal{Z}(I(A)) \supset A \\ J \subset k[T_1, ..., T_n], I(\mathcal{Z}(J)) \supset J \end{aligned}$$

$\Rightarrow I(\mathcal{Z}(I(A))) = I(A)$ Insbesondere $A \subset k^n$ algebraisch, so $\mathcal{Z}(I(A)) = A$

Lemma 1.1(Abschluss in der Zariski-Topologie) $A \subset k^n$ mit k kommutativer Integritätsbereich, so $\mathcal{Z}(I(A)) = \overline{A} \leftarrow$ Abschluss in der Zariski-Topologie.

Definition 1.5 (X,T) topologischer Raum, $A \subset X$
Der Abschluss von A in X ist die kleinste abgeschossene Teilmenge von X, der A umfasst.

$$\overline{A} \bigcup_{B \subset X B \supset A} B$$

Beweis: $\not{Z} B \supset A$ und B abgeschlossen in k^n:$\Rightarrow B \supset \mathcal{Z}(I(A))$

$$B \supset A \qquad \Rightarrow I(B) \subset I(A) \qquad \Rightarrow \mathcal{Z}(I(B)) \supset \mathcal{Z}(I(A))$$

Aber $\mathcal{Z}(I(B)) = B$

□

Beispiel 1.3 $A \subset \mathbb{R}$ und A unendlich $\Rightarrow \overline{A} = \mathbb{R}$
$\underline{I(A) =< 0 >}$ und $\mathcal{Z}(I(A)) = \mathcal{Z}(< 0 >) = \mathbb{R}$
$\overline{\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | x^2 + y^2 = 1\}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
Allgemein hat jede unendliche Teilmenge des Einheitskreises, bereits den ganzen Einheitskreis als Abschluss.

Definition 1.6(Moduln über Ringen) R Ring. Ein R-Modul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ mitsamt einer Abbildung $\begin{array}{c} R \times M \to M \\ (r, m) \mapsto rm \end{array}$
so dass gilt $(\forall r, s \in R, \forall m, n \in M)$:

$$1m = m \tag{0.1}$$
$$r(sm) = (rs)m \tag{0.2}$$
$$(r + s)m = rm + sm \tag{0.3}$$
$$s(m + n) = sm + sn \tag{0.4}$$
$$\tag{0.5}$$

Beispiel 1.4 R, R^n, jedes Ideal von R.
Für jede abelsche Gruppe M gibt es genau eine Struktur als $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z} \times M \to M$.

Heuristik: $2m = (1 + 1)m = 1m + 1m = m + m$. So gibt die Addition bereits die ganze Multiplikation vor. Es gibt also keinen Spielraum mehr.

Unterschiede zu VR: Nicht jeder endlich erzeugte R-Modul ist isomorph zu R^n. Bsp: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nicht zu $\mathbb{Z}^n$

Definition 1.7 X topologischer Raum, $Y \subset X$ heißt *dicht* in X genau dann, wenn $\overline{Y} = X$
X, X' topologische Räume, $f : X \to X'$ heißt stetig genau dann, wenn $U' \subset X'$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U') \subset X$ offen
$f : X \to X'$ heißt Homöomorphismus genau dann, wenn f stetig+bijektiv und f^{-1} stetig

Definition 1.8 $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus und $M \in S$-Modul, so mache M zu R-Modul durch die Vorschrift $rm := \varphi(r)m$ (*Restriktion der Skalare*)

Beispiel 1.5 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Jeder komplexe Vektorraum wird durch Restriktion der Skalare zu reellem Vektorraum

Beispiel 1.6 $R \supset \mathfrak{a}$ Ideal, $\varphi : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$
$R/\mathfrak{a}$ wird durch Restriktion der Skalare ein R-Modul

Definition 1.9 R Ring, $M, N \in R$-Modul. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist die Menge aller R-Modulhomomorphismen. Hom ist eine Abelsche Gruppe. Falls R kommutativ ist Hom ein R-Modul

Lemma 1.2 R Ring, $M \in R$-Modul:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(R, M) &\xrightarrow{\sim} M \\ \varphi &\longrightarrow \varphi(1) \\ (\cdot, m) &\longleftarrow m \\ r &\longrightarrow r \cdot m \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Untermodul
$\Rightarrow M \in R$-Modul, $T \subset M \Rightarrow \langle T \rangle_R \subset M$ das von T erzeugte Untermodul
$\{r_1 t_1 + ... + r_s t_s \mid t_i \in T, r_i \in R, s \geq 0\}$
$\Rightarrow$ Ein Modul heißt *endlich erzeugt* gdw es von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird

Achtung: Ein Untermodul von einem endlich erzeugten Modul muss *nicht* endlich erzeugt sein!

Beispiel 1.7 $\mathbb{Q}[X_1, X_2, ...] \supset$\{alle Elemente ohne konstanten Term\}$= I$ nicht endlich erzeugt, aber Ideal.
I/I^2 hat $\mathbb{Q}$-Basis $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Definition 1.10 Ein Modul heißt *zyklisch*, gdw es erzeugt wird von einem Element

Satz 1.2 $M \supset N$ ein Modul mit Untermodul, so gibt es auf M/N genau eine Struktur als R-Modul, so dass $M \twoheadrightarrow M/N$ ein Homomorphismus von R-Moduln ist.

(Universelle Eigenschaft) Für jeden weiteren R-Modul L:

$$\mathrm{Hom}_R(M/N, L) \overset{\circ\, can}{\xrightarrow{\sim}} \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, L) \mid \varphi(N) = 0\}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "can"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & M/N \arrow[dl, "\exists!"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Definition 1.11 R Ring, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Familie von Moduln $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\}$ R-Modul heißt Produkt der M_λ $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda = 0 \text{ für fast alle } \lambda\}$ Direkte Summe der M_λ

$L \in R$-Modul

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(L, \prod M_\lambda) &\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(L, M_\lambda) \\
\varphi &\longrightarrow (\mathrm{pr}_\lambda \circ \varphi)_{\lambda\in\Lambda} \\
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, L) &\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, L) \\
\varphi &\longrightarrow (\varphi \circ \mathrm{in}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}
\end{aligned}$$

Definition 1.12 Eine Basis eines Moduls ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Ein Modul über einem Ring heißt *frei* gdw er eine Basis hat $(m_i)_{i\in I}$ Familie in R-Modul M (=Abbildung $I \to M$) ist linear unabhängig gdw

$$\sum_{i\in I} r_i m_i = 0 \Rightarrow \text{ alle } r_i = 0$$

Definition 1.13 I Menge, R Ring, $RI = \{\varphi : I \to R \mid \varphi(i) = 0 \text{ für fast alle } i\} = \bigoplus\limits_{i\in I} R$ heißt *freier R-Modul über I*
$\mathrm{Hom}_R(RI, M) \overset{\circ\, can}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Ens}(I, M)$

Bemerkung $(m_i)_{i\in I}$ ist Basis von M gdw

$$\begin{aligned}
RI &\to M \\
\varphi_i &\mapsto m_i
\end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist

Beispiel 1.8 R Nullring

V ein k-Vektorraum von abzählbar unendlicher Dimension, $R = \mathrm{End}_k V$. Ist W ein k-Vektorraum, so ist $\mathrm{Hom}_k(W, V)$ ein R-Modul. Ist W auch von abzählbarer Dimension, so $\mathrm{Hom}_k(W, V) \cong R$ als R-Modul. $V = W_1 \oplus W_2$ mit W_i abzählbar unendlicher Dimension. $\mathrm{Hom}_k(V, V) \cong \mathrm{Hom}_k(W_1, V) \oplus \mathrm{Hom}_k(W_2, V)$. Also $R \cong R \oplus R$

Lemma 1.3 $R \neq 0$ kommutativer Ring, $n, m \in \mathbb{N}$ mit $R^n \overset{\sim}{=} R^m$ als R-Modul, so ist $m = n$.

Bemerkung Ist M freies, endlich erzeugtes R-Modul, so gibt es genau ein n mit $M \overset{\sim}{=} R^n$. $n =$:rang(M) (Falls $R \neq 0$ kommutativ)

Beweis::

□

$n < m$, $R^n \underset{(A\cdot)}{\overset{\overset{(B\cdot)}{\longleftarrow}}{\overset{\sim}{\longrightarrow}}} R^m$, $A \in M(m \times n, R)$
$AB = E_m$, $BA = E_n$ - funktioniert net :-P

Definition 1.14 Ein Modul heißt *noethersch* gdw der Modul und alle seine Untermoduln endlich erzeugt sind.
Ein (nicht-)kommutativer Ring heißt (links-)noethersch gdw er noethersch ist als Modul über sich selbst. (Kommutativ:⇔ Jedes Ideal ist endlich erzeugt)

Beispiel 1.9 : $\mathbb{Z}$, Hauptidealringe, $k[X]$...

Proposition

1. Jeder Untermodul und jeder Quotient eines noetherschen Moduls ist noethersch.
2. Ist $M \supset N$ Modul mit Untermodul, M/N und N noethersch $\Rightarrow M$ noethersch

Anders ausgedrückt: Sei R ein Ring, $M' \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so gilt:
M noethersch $\Leftrightarrow$ M' und M'' noethersche
(f injektiv, g injektiv, ker$g$ =Img)

Übung R Kring, $I \subset R$ Ideal, R noethersch $\Rightarrow R/I$ noethersch

Lemma 1.4 Sei R noetherscher Kring, so ist ein R-Modul noethersch gdw er endlich erzeugt ist

Beweis:⇒ trivial.
⇐ M endlich erzeugt $\Rightarrow R^n \twoheadrightarrow M$ (gibt Surjektion)
$M = Rm_1 + ... + Rm_n$, $(r_1, ..., r_n) \mapsto r_1 m_1 + ... + r_n m_n$, R^n ist noetherscher R-Modul

$R \overset{inj}{\hookrightarrow} \underbrace{R \oplus R}_{R^2} \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} R$

$R \overset{inj}{\hookrightarrow} R^3 \overset{p_{23}}{\twoheadrightarrow} R^2$ - Induktiv

□

Korollar Jede Untergruppe von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist endlich erzeugt ($R = \mathbb{Z}$)

Satz 1.3(Hilbert'scher Basissatz) Ist R noetherscher Kring, so ist auch $R[X]$ noethersch.

*Beweis:*Jedes Ideal $I \subset R[X]$ ist endlich erzeugt. Sicher bilden die Leitkoeffizienten von Polynomen aus I ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$
Da R noethersch ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt von $a_1, ..., a_r$. Diese sind Leitkoeffizienten von $f_1, ..., f_r \in I \subset R[X]$
Sei m maximal unter den Graden der Polynome f_i. Ist $h \in I$ gegeben mit grad$f \geq m$, so $\exists b_1, ..., b_r$ und $\nu_1, ..., \nu_r$ mit
grad$(h - b_1 X^{\nu_1} f_1 - ... - b_r X^{\nu_r} f_r) <$grad$h$
Induktiv: Für $h \in I$ finde ich $c_1, ..., c_r \in R[X]$ mit
grad$(h - c_1 f_1 - ... - c_r f_r) < m$. Aber $I \cap (R + RX + ... + RX^{m-1})$ ist R-Modul von $R + RX + ... + RX^{m-1}$, also erzeugt von $g_1, ..., g_s \in I$ als R-Modul. Also $I = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$

□

Korollar K Körper oder noetherscher Kring, so $K[X_1, ..., X_n]$ noethersch.

*Beweis:*Induktion.

□

Lemma 1.5 Für einen Modul M sind gleichbedeutend:

1. M noethersch, also jeder Untermodul endlich erzeugt
2. Jedes nichtleere System von Untermoduln besitzt ein maximales Element
3. Jede aufsteigende Folge von Untermoduln $M_0 \subset M_1 \subset ...$ wird stationär, d.h. $\exists n$ so dass $M_n = M_{n+1} = ...$

Beweis: $1 \Rightarrow 3$: $M_0 \subset M_1 \subset ...$ Untermoduln, so $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ ist Untermodul, also endlich erzeugt von $m_1, ..., m_s$, also $\exists n$ mit $m_1, ..., m_s \in M_n$, also $M_n = M_{n+1} = ... = \bigcup = \langle m_1, ..., m_s \rangle$
$\neg 1 \Rightarrow \neg 3 : \Rightarrow \exists U \subset M$ nicht endlich erzeugter Untermodul.

Wähle induktiv $u_i \in U \setminus \langle u_0, ..., u_{i-1} \rangle$
Bilde $M_i = \langle u_0, ..., u_i \rangle$ aufsteigende Kette von Untermoduln, die nicht stabilisiert.
$2 \Leftrightarrow 3$ Ist $(X, \leq)$ partiell geordnete Menge, so sind gleichbedeutend:

a) Jede nichtleere Teilmenge besitzt maximales Element

b) Jede monoton wachsene Folge wird stationär

$\square$

Definition 1.15 Sei $A \to B$ Kringhomomo

a) B heißt *endlich über* A gdw es endlich erzeugt ist als A-Modul

b) B heißt *von endlichem Typ über* A gdw es endlich erzeugt ist als Ring über A, also erzeugt als Ring vom Bild von A mit endlich vielen weiteren Elementen

c) Ein Element $b \in B$ heißt *ganz* (bei Körper algebraisch) über A gdw es Nullstelle ist eines normierten Polynoms in $A[X]$

d)

Beispiel 1.10 $A[X]$ nicht endlich über A, falls $A \neq 0$
$\mathbb{Z}[X]$ von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$, $A[X_1, ..., X_n]$ von endlichem Typ über A

Satz 1.4(Körpertheoretischer Hilbert'scher Nullstellensatz) Jede Körpererweiterung von endlichem Typ ist endlich
$k \subset L$ Körper, sd $\exists x_1, ..., x_r \in L$ mit $L = k[x_1, ..., x_r]$, so $\dim_k L < \infty$

Billigbeweis für k überabzählbar Falls $x_1, ..., x_r$ algebraisch über k, so $[L : k] < \infty$
Falls $[L : k] = \infty$, so $\exists i$ mit $x_i =: t$ transzendent über k

$$\begin{tikzcd} k[t] \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "\subset"'] & & L \\ & k(t) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

$\dim_k k(t)$ überabzählbar, $(\frac{1}{t-\lambda})_{\lambda \in k} \in k(t)$ k-linear unabhängig, also $\dim_k L$ abzählbar $\lightning$

Lemma 1.6 $A \to B \to C$

1. B endlich über A und C endlich über B, so C endlich über A

2. Gleiches für "von endlichem Typ"

Beweis: 1: $B = Ab_1 + ... + Ab_r$, $C = Bc_1 + ... + Bc_s \Rightarrow C = \sum_{i,j} Ab_ic_j$
2: $B = A[b_1, ..., b_r]$, $C = B[c_1, ..., c_s] \Rightarrow C = A[b_1, ..., b_r, c_1, ..., c_s]$

□

Lemma 1.7 $B = A[x_1, ..., x_r]$ und alle x_i ganz über A, so B endlich über A

Beweis: $x_1 \in B$ ganz über A.
$B \twoheadleftarrow A[X]/\langle P\rangle$, P normiert vom Grad m

$$\begin{tikzcd} B & A[X]/\langle P\rangle \arrow[l, two heads] \\ & A + AX + ... + AX^{m-1} \arrow[u, "s"] \end{tikzcd}$$

□

Satz 1.5(über Körpererweiterungen endlichen Typs) Sei $L \supset k$ Körpererweiterung. Ist L von endlichem Typ über k, so ist L endlich über k

Beweis: $L = k[e_1, ..., e_n]$
Sind alle e_i algebraisch über k, so ist $[L : k] < \infty$
Sonst gäbe es eine maximale algebraisch unabhängige Teilfamilie oBdA $e_1, ..., e_r$:

$$k['T_1, ..., T_r] \hookrightarrow L \qquad \text{injektiv}$$
$$T_i \to e_i$$

aber $e_{r+1}, ..., e_n$ algebraisch über $K = \mathrm{Quot}k['T_1, ..., T_r] = k('T_1, ..., T_r)$
Die Koeffizienten der Minimalpolynome der e_i über K für $i = r + 1, ..., n$ erzeugen über k einen Teilring $A \subset K$ noethersch.
$(\underbrace{k \subset \underbrace{A}_{\text{noethersch, endlich erzeugter } k\text{-Kring}} \subset K \subset L}_{\text{endlich}}$ weil $L = A[e_{r+1}, ..., e_n]$ mit e_i ganz über A)
Da A noethersch, K endlich über A, also K endlich erzeugt als k-Kring
Aber: $k(T_1, ..., T_r)$ für $r \geq 1$ kann nicht endlich erzeugt sein als k-Kring, denn in den Nennern von endlich vielen hypothetischen Erzeugern können nur endlich viele irreduzible Polynome vorkommen $\lightning \Rightarrow r = 0$

□

Definition 1.16 A Ring, $\mathfrak{m} \subset A$ Ideal. $\mathfrak{m}$ heißt *maximales Ideal* gdw $\mathfrak{m}$ ist maximal unter allen echten Idealen von A, also $\mathfrak{m} \neq A$ und ist $I \subset A$ Ideal mit $\mathfrak{m} \subsetneq I$, so $I = A$
$\mathrm{Max}(A) = \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m} \text{ ist maximales Ideal}\}$

Beispiel 1.11 $\text{Max}\mathbb{Z} = \{\langle p\rangle \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}$
R faktoriell, so $\text{Max}R = \{\langle p\rangle \mid p \text{ irreduzibel}\}$
$\text{Max}\mathbb{C}[T] = \{\langle T - \lambda\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$

Satz 1.6 Sei R Ring und $I \subsetneq R$ Ideal, so existiert $\mathfrak{m} \in \text{Max}R$ mit $m \supset I$

Beweis: R noethersch, so klar.
Sonst Zorn: Das System aller echten Ideale von R, die I umfassen, ist stabil unter "aufsteigenden Vereinigungen"

Lemma von Zorn Sei $(X, \leq)$ partiell geordnete Menge derart, dass jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, so besitzt X mindestens ein maximales Element

$\square$

Satz 1.7 Sei R Kring, $I \subset R$ Ideal, so ist I maximal gdw R/I ein Körper ist.

Lemma 1.8 R Kring, R Körper gdw $\langle 0\rangle \subset R$ maximales Ideal ist.

Beweis: $\Rightarrow$: ✓
$\Leftarrow$: $\langle 0\rangle \in \text{Max}R \Rightarrow \langle 0\rangle \neq \langle 1\rangle \Rightarrow 0 \neq 1$
$a \in R \setminus 0 \Rightarrow \langle a\rangle \supsetneq \langle 0\rangle \Rightarrow \langle a\rangle = R$
$\Rightarrow 1 \in \langle a\rangle \Rightarrow \exists b \in R$ mit $ab = 1$

$\square$

Bemerkung: Sei $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ surjektiver Ringhomo. So:

$$\{\text{Ideale von } R, \text{ die ker}\varphi \text{ umfassen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale von } S\}$$

$I \to \varphi(I)$
$\varphi^{-1}(J) \leftarrow J$

Beweis (2. Weg):
$\Rightarrow$: $R/I \neq 0$ klar. Sei $a \in R$
$0 \neq \overline{a} \in R/I \Rightarrow a \in R \setminus U \Rightarrow I + Ra = R \ni 1$
$\Rightarrow \exists b \in R$ mit $I + ab \ni 1$ alias $ab \in 1 + I \Rightarrow \overline{a}\overline{b} = 1$

$\square$

Lemma 1.9 (Maximale Ideale in Polynomringen) Sei $k = \overline{k}$, so liefert I Bijektion

$$\begin{aligned} k^n &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}k[T_1, ..., T_n] \\ \underbrace{x}_{(\lambda_1,...,\lambda_n)} &\longrightarrow \underbrace{I(x)}_{\langle T_1-\lambda_1,...,T_n-\lambda_n\rangle} \end{aligned}$$

Beweis (Lemma): $x \in k^n \Rightarrow I(x) = \ker(k[T_1, ..., T_n] \twoheadrightarrow k)$ (auswerten bei x)

Bemerkung: $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ surjektiver Kringhomo, so erhalte Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}S &\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R \mid \mathfrak{m} \supset \ker\varphi\} \\ I &\to \varphi^{-1}(I) \\ \varphi(\mathfrak{m}) &\leftarrow \mathfrak{m} \end{aligned}$$

Zz surjektiv
Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}k[T_1, ..., T_n]$. Betrachte $k \hookrightarrow k[T_1, ..., T_n] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} k[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{m} =: L$ ist Körper von endlichem Typ über $k \Rightarrow [L : k] < \infty \overset{k=\overline{k}}{\Rightarrow} [L : k] = 1 \Rightarrow$ isomorph
Also $\exists \lambda_i \in k$ mit $\overline{T_i} = \varphi(\lambda_i)$ in L
Behaupte $\mathfrak{m} = I(x)$ für $x = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Reicht Zz $\supset$, also $(T_i - \lambda_i) \in \mathfrak{m} \forall i$
Aber $\pi(T_i - \lambda_i) = \overline{T_i} - \varphi(\lambda_i) = 0 \forall i$
$I(x) = \langle T_1 - \lambda_1, ..., T_n - \lambda_n\rangle$ falls $x = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ klar für $x = 0$, folgt durch "verschieben" im Allgemeinen

□

Lemma 1.10 $k = \overline{k}$, $I \subset k[T_1, ..., T_n]$ Ideal.
$\mathcal{Z}(I) = \emptyset \Rightarrow I = \langle 1\rangle$

Beweis: $I \neq \langle 1\rangle \Rightarrow \exists \mathfrak{m}$ maximal mit $\mathfrak{m} \supset I \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \subset \mathcal{Z}(I)$ ↯

□

Beweis Hilbertscher Nullstellensatz: $k = \overline{k}$, $I \subset k[T_1, ..., T_n]$ Ideal, $f \in k[T_1, ..., T_n]$ dann gilt: $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I) \Rightarrow f^N \in I$ für $N \gg 0$
Rabinowitch-Trick: Betrachte $k[T_1, ..., T_n, T] \ni fT - 1$
$J = \langle I, fT-1\rangle$ dann gilt: $\mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I) \cap \mathcal{Z}(fT-1) = \emptyset \Rightarrow J = k[T_1, ..., T_n, T]$
$\Rightarrow 1 = a_0(fT - 1) + a_1 f_1 + ... + a_m f_m$ mit $f_i \in I, a_i \in k[T_1, ..., T_n, T]$
oBdA $f \neq 0$. Betrachte:

$$\begin{array}{ccc} k[T_1,...,T_n,T] & & \ni T \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow \\ k[T_1,...,T_n,f^{-1}] & & \ni f^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \subset \\ k(T_1,...,T_n) \end{array}$$

Also $1 = \psi(a_1)f_1 + ... + \psi(a_m)f_m \Rightarrow f^N = \underbrace{(f^N\psi(a_1))}_{\in k[T_1,...,T_n] \text{ für } N \gg 0} f_1 + ... + f^N\psi(a_m)f_m$

$\Rightarrow f^N \in I$

$\square$

Lemma 1.11 $k = \overline{k}$, $\mathfrak{a} \subset k[T_1,...,T_n]$ Ideal, so $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

Beweis: $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$ trivial, Umkehrung folgt aus Hilbertschem Nullstellensatz

$\square$

Definition 1.17 Ein Ideal $I \subset R$, R Kring heißt *Radikalideal* gdw. $I = \sqrt{I}$

Lemma 1.12 $k = \overline{k}$

$$\left\{\begin{matrix}\text{algebraische}\\ \text{Teilmengen in } k^n\end{matrix}\right\} \underset{Z}{\overset{I}{\substack{\rightarrow \\ \sim \\ \leftarrow}}} \left\{\begin{matrix}\text{Radikalideale}\\ \text{in } k[T_1,...,T_n]\end{matrix}\right\}$$

Beweis: $X = \mathcal{Z}(I(X)) \forall X \subset k^n$, $\mathfrak{a} = I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$, $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$

$\square$

Definition 1.18 k Kring. $X \subset k^n, Y \subset k^m$. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt *polynomial* oder *algebraisch* gdw:

$$\exists P_1, ..., P_m \in k[T_1,...,T_n] : \varphi(x) = (P_1(x), ..., P_m(x)) \forall x \in X$$

Die Verknüpfung polynomialer Abbildungen ist wieder polynomial

$X \subset k^n$, die algebraischen Abbildungen $f : X \to k$ heißen *reguläre* oder *polynomiale* Funktionen auf X. Notation: $\mathcal{O}(X)$

$\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X,k)$ Unterring.

Definition 1.19 k Körper. Ein *affiner k-Kring* ist ein k-Kring, der endlich erzeugt ist als k-Kring und nilpotentfrei.

Satz 1.8(Räume und Ringe) $k = \overline{k}$, so ist O eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{\begin{matrix}\text{algebraische Teilmengen}\\ \text{von irgendwelchen } k^n,\\ \text{polynomiale Abbildungen}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{affinen}\\ k\text{-Kringe}\end{matrix}\right\}^{\text{opp}}$$

$X \longrightarrow \mathcal{O}(X)$
$\downarrow \varphi \rightarrow \uparrow \varphi^{\#}$
$Y \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$

Definition 1.20 Eine Kategorie besteht aus

1.) Einer Klasse ObC von Objekten

2.) Für je zwei Objekte $X, Y \in$ObC eine Menge $C(X, Y)$ von Morphismen

3.) Für je drei Objekte X, Y, Z eine Abbildung

$$\begin{aligned} C(X, Y) \times C(Y, Z) &\to C(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

so dass gelten:

a.) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \forall X, Y, Z, W \in$Ob$C$

b.) $\forall X \in$Ob$C \exists id_X \in C(X, X)$ mit $id_X \circ f = F \forall f : Y \to X$
$g \circ id_X = f \forall g : X \to Z$ (Identität)

Beispiel 1.12 Die Kategorie UEns der Mengen: Ob(Ens)=“alle Mengen aus U”, Ens$(X, Y) =$ alle Abbildungen $X \to Y$
$f \circ g =$Verknüpfungen von Abbildungen

Beispiel 1.13 G Monoid, dann ist $[G]$ die Kategorie mit einem Objekt pt und $[G]$(pt,pt) $= G$

Beispiel 1.14 R Ring, R-Mod ist die Kategorie aller R-Moduln

Definition 1.21 Seien A, B Kategorien. Ein *Funktor* $F : A \to B$ besteht aus

1. einer Abbildung F :Ob(A) $\to$Ob(B)
2. $\forall X, Y \in A$ einer Abbildung $F : A(X, Y) \to B(FX, FY)$ so dass gilt:
   a) $F(id_X) = id_{FX}$
   b) $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$

Beispiel 1.15 $R\text{-Mod} \overset{\text{vergiss}}{\to} \text{Ens}$
R-Mod$\to$ S-Mod, falls $S \subset R$ (Restriktion der Skalare) oder $\varphi : S \to R$ gegeben
C^{opp} :Ob(C^{opp} =Ob(C), $C^{\text{opp}}(X,Y) = C(Y,X)$, $f \underset{\text{opp}}{\circ} g = g \circ f$

Definition 1.22 Ein Funktor $F : A \to B^{\text{opp}}$ heißt *kontravarianter Funktor* von A nach B

Beispiel 1.16 k Körper,

$$\begin{aligned} k\text{-Mod} &\to k\text{-Mod} \\ V &\mapsto V^* \end{aligned}$$

Definition 1.23 Ein Funktor $F : A \to B$ heißt *Äquivalenz* von Kategorien gdw

1. $\forall b \in B \exists a \in A : F(a) \simeq b$
2. $\forall a, a' \in A$ liefert F eine Bijektion auf den Morphismenräumen $A(a,a') \xrightarrow{\sim} B(Fa, Fa')$

Definition 1.24 Ein Morphismus $f \in C(X,Y)$ heißt Isomorphismus gdw $\exists g \in C(Y,X)$: $f \circ g = id_g, g \circ f = id_X$
Zwei Objekte X, Y heißen isomorph ($X \simeq Y$) wenn es einen Isomorphismus $X \to Y$ gibt.

Beispiel 1.17 k Körper, sei $M(k) = M$ Matrixkategorie:
Ob$(M(k)) = \mathbb{N}$, $M(n,m) = M(m \times n, k)$

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\approx} k\text{-Mod}^{<\infty} \\ n &\mapsto k^n \\ M \downarrow &\to (M\cdot) \downarrow \\ m &\mapsto k^m \end{aligned}$$

Übung $F : A \to B$ Funktor, f isomorph $\Rightarrow Ff$ isomorph

Beweis (Satz Räume und Ringe):
Eigenschaft 1: Zeige: gegeben affiner k-Kring A, existiert $X \subset k^n$ abgeschlossen, so dass $\mathcal{O}(X) \simeq A$
endlich erzeugt $\Rightarrow k[T_1, ..., T_n] \twoheadrightarrow A$, sei $\mathfrak{a}$ Ideal über kern
$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{O}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))}_{=X} \xleftarrow{\sim} k[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$, A nilpotentfrei $\Rightarrow \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$

□

Satz 1.9 $k = \overline{k}$ Der Funktor $\mathcal{O}$ ist Äquivalenz von Kategorien

{Algebr. Teilmengen von k^n für $n \geq 0$, polynomielle Abbildungen} $\xrightarrow{\approx}$ {Affine k-Kringe}^{opp}

$X \longrightarrow \mathcal{O}(X)$
$\varphi \downarrow \longrightarrow \varphi^{\#} \uparrow$
$Y \longrightarrow \mathcal{Y}$
"Vorschalten von φ"
$\xrightarrow{\approx}$ meint Äquivalenz von Kategorien, meint

a.) surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten ✓

b.) Bijektiv auf Morphismen

Beweis: $\mathrm{Pol}(X, Y) = \{\varphi : X \to Y \mid \varphi \text{ ist polynomial}\}$
$\mathbb{Z} : \mathrm{Pol}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$
$\varphi \to \circ\varphi$ ist Isomorphismus.
$Y \overset{i}{\hookrightarrow} k^n$ algebraische Teilmenge. $\rightsquigarrow \mathcal{O} \twoheadleftarrow \mathcal{O}(k^n) = k[T_1, ..., T_n] \hookleftarrow I(Y)$

$$\begin{tikzcd}
Pol(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "i\circ"'] & Kring^k(\mathcal{O}(Y),\mathcal{O}(X)) \arrow[d, "(\circ r)=i^{\#}"] \\
Pol(X,k^n) \arrow[r, "\sim"] & Kring^k(k[T_1,...,T_n],\mathcal{O}(X)) \\
\mathcal{O}(X)^m \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

$Y = \mathcal{Z}(I(Y)) \Rightarrow \mathrm{Pol}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \{(\varphi_1, ..., \varphi_m) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\varphi_1, ..., \varphi(m)) = 0 \forall f \in I(Y)\}$
$\mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \xrightarrow{s} \left\{\psi \in \mathrm{Kring}^k(k[T_1, ..., T_m], \mathcal{O}(X)) \mid \psi(f) = 0 \forall f \in I(Y)\right\}$
$\xrightarrow{\sim} \{(\psi_1, ..., \psi_m) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\psi_1, ..., \psi_m) = 0 \forall f \in I(Y)\}$
$\Rightarrow \mathrm{Pol}(X, Y) \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$

□

2 Irreduzible Komponenten

Definition 2.1 Ein topologischer Raum heißt *noethersch* gdw jede absteigende Folge abgeschlossener Mengen stagniert[1]

Beispiel 2.1 k Körper, so k^n mit Zariski-Topologie noethersch.
$Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset ...$ abgeschlossen $\rightsquigarrow I(Y_0) \subset I(Y_1) \subset I(Y_2) \subset ...$ sind Ideale in $k[T_1, ..., T_n]$, stagnierend, da Polynomring noethersch $\rightsquigarrow \mathcal{Z}(I(Y_0)) \supset ...$ stagniert

[1] stationär wird :-P

Definition 2.2 Ein topologischer Raum X heißt *irreduzibel* gdw $X \neq \emptyset$ und X lässt sich nicht schreiben als Vereinigung zweier nicht leerer echt abgeschlossener Teilmengen

Beispiel 2.2 $|k| = \infty$, so k irreduzibel

Definition 2.3 Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt irreduzibel gdw (sie irreduzibel ist für Spurtopologie): $\nexists A, B \subset X$ abgeschlossen mit $Y \subset A \cup B$
EIne algebraische Teilmenge Y eines topologischen Raums X heißt irreduzibel gdw. gilt: $X \neq \emptyset$ und X lässt sich nicht schreiben als Vereinigung zweier nicht leerer echt abgeschlossener Teilmengen

Definition 2.4 Eine maximale, abgeschlossene, irreduzible Teilmenge eines topologischen Raums heißt eine *irreduzible Komponente*

Satz 2.1 Ein noetherscher topologischer Raum besitzt höchstens endlich viele irreduzible Komponenten, keine davon ist in der Vereinigung der übrigen enthalten und zusammen überdecken sie den ganzen Raum.

Lemma 2.1 Jede abgeschlossene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen.

*Beweis:*Durch Widerspruch: Sei sonst $Y \subset X$ abgeschlossen und minimal ohne derartige Darstellung. So Y nicht irreduzibel, nicht leer und $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $Y_i \subsetneq Y$ abgeschlossen. Also kann Y_i darstellen als... $\lightning$
(Beweisprinzip nennt sich "noethersche Induktion")

□

Lemma 2.2 X topologischer Raum, $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ mit X_i irreduzibel, $X_i \subset X$ abgeschlossen und $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$, so sind die X_i die irreduziblen Komponenten von X

*Beweis:*Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und irreduzibel, so $Y = (Y \cap X_1) \cup ... \cup (Y \cap X_n)$, also $\exists i$ mit $Y = Y \cap X_i$, also $\exists i$ mit $Y \subset X_i$

□

*Beweis (Satz):*Nach Lemma 1.13 schreibe $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ mit $X_i \subset X$ abgeschlossen und irreduzibel
o.B.d.A. $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$. Dann sind nach Lemma 1.14 $X_1, ..., X_n$ die irreduziblen Komponenten von X.

Falls $X_1 \subset X_2 \cup ... \cup X_n$, so folgte $X_1 = (X_1 \cap X_2) \cup ... \cup (X_1 \cap X_n)$, also $X_1 = X_1 \cap X_i$↯

□

Definition 2.5 Die Krull-Dimension eines topologischen Raums X ist

$$\text{kdim} X = \sup_{\ell} \{\exists \text{Kette von irreduziblen abgeschl. Teilmengen } Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq ... \subsetneq Y_\ell \subset X\}$$

Beispiel 2.3 $|k| = \infty \Rightarrow \text{kdim} k^n \geq n$

Satz 2.2 k Körper, $X \subset k^n$ abgeschlossen. So gilt: X ist irreduzibel gdw $\mathcal{O}(X)$ ist Integritätsbereich

Beweis: $X \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O}(X) \neq 0$
X irreduzibel $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ kein Integritätsbereich
$X \neq \emptyset \Rightarrow X = Y \cup Z$, beide abgeschlossen $\Rightarrow \exists a \in \mathcal{O}(X)$ mit der Eigenschaft $Y \subset \mathcal{Z}(a) \subsetneq X$
$\exists b \in \mathcal{O}(X)$ mit der Eigenschaft $Z \subset \mathcal{Z}(a) \subsetneq X$
aber $ab = 0$ in $\mathcal{O}(X)$

□

Definition 2.6 R Kring. Ein Ideal $p \subset R$ heißt *Primideal* gdw

1. $p \neq R$
2. $a, b \in R, ab \in p$, so $a \in p$ oder $b \in p$

Bemerkung R Kring. Ein Ideal $p \subset R$ ist Primideal gdw R/p ein Integritätsbereich ist.

Beispiel 2.4 $\langle m \rangle \subset \mathbb{Z}$ Primideal gdw $m = 0$ oder $\pm m$ Primzahl

Definition 2.7 R Kring. $\text{Spec} R = \{p \subset R \mid p \text{ ist Primideal}\}$ heißt das *Spektrum* von R

Satz 2.3 $k = \overline{k}$, $X \subset k^n$ abgeschlossen:
$\text{Spec}\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \{Y \subset X \text{ abgeschl.} \mid Y \text{ irreduzibel}\}$
$p \longrightarrow \mathcal{Z}(p)$
$I(Y) \longleftarrow Y$

Definition 2.8 R Kring. Die Krull-Dimension von R ist
$\mathrm{kdim}(R) = \sup\{l \mid p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \ldots \subsetneq p_l \subset R$ Kette von Primidealen$\}$
$\mathrm{kdim}\mathcal{O}(X) = \mathrm{kdim}X$

Lokalisierung R Kring, $S \subset R \rightsquigarrow S^{-1}R$ Kring, $S^{-1}R = \left\{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\right\}$
$\mid S\rangle = \{$endliche Produkte von Elementen aus $S\}$

1. Auf $\mid S\rangle \times R$ definiere Äquivalenzrelation $(s,a) \sim (t,b) \Leftrightarrow \exists r \in\mid S\rangle$ mit $rta = rsb$
   Setze $S^{-1}R = (\mid S\rangle \times R)/\sim$. Schreibe $\frac{a}{s}$ für $[(s,a)]$
2. Definiere Addition und Multiplikation auf $S^{-1}R$:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st} \qquad \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{ab}{st}$$
3. Prüfe, dass $S^{-1}R$ so ein kommutativer Ring wird.

Satz 2.4 Sei R Kring, $S \subset R$

1. Die Abbildung $can : R \to S^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$ ist Ringhomo und die Bilder aller $s \in S$ sind invertierbar in $S^{-1}R$
2. Ist $\varphi : R \to A$ Kringhomo und sind alle $\varphi(s) \in A^\times$, so existiert genau ein Kringhomo $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ can$

   Beweis (nur 2): Kann und muss $\tilde{\varphi}$ erklären durch $\tilde{\varphi}\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1} \forall s \in\mid S\rangle, \forall a \in R$.

   □

Bemerkung 1 Enthält S keine Nullteiler von R, so ist $R \to S^{-1}R$ injektiv

Bemerkung 2 $0 \in\mid S\rangle \Rightarrow S^{-1}R = 0$

Bemerkung 3 R Integritätsbereich, $0 \notin S$ so $S^{-1}R$ auch Integritätsbereich und $S^{-1}R \to \mathrm{Quot}R$ ist Injektion mit $\mathrm{Im}\left\{\frac{a}{s} \in \mathrm{Quot}R \mid s \in\mid S\rangle\right\}$

Notation: $S = \{f\} \rightsquigarrow S^{-1}R = R_f = R[f^{-1}]$
$p \in \mathrm{Spec}R, S = R \setminus p \rightsquigarrow S^{-1}R = R_p$

Proposition Jede Lokalisierung eine noetherschen Krings ist noethersch

Beweis:
$\left\{\text{Ideale von } S^{-1}R\right\} \to \{\text{Ideale von } R\}$
$I \mapsto can^{-1}(I) = \left\{a \mid \frac{a}{1} \in I\right\}$
Wähle endlich viele Erzeuger von $can^{-1}(I)$, deren Bilder erzeugen I

□

Satz 2.5 (Primideale in Lokalisierungen) R Kring, $S \subset R$ so liefert can^{-1} Bijektion $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \xrightarrow{\sim} \{p \in \mathrm{Spec}R \mid p \cap S = \emptyset\}$
deren Inverse gegeben wird durch $p \mapsto \langle S^{-1}p\rangle$ das von p in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal

*Beweis:*Einziges Problem: Surjektion
Zeige: Für $p \in \mathrm{Spec}R$ mit $p \cap S = \emptyset$ gilt (1) $can^{-1}\langle S^{-1}p\rangle = p$ und (2) $\langle S^{-1}p\rangle$ ist prim in $S^{-1}R$
(2) zeige: a) $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \langle S^{-1}p\rangle \Rightarrow \frac{a}{s} \in \langle S^{-1}p\rangle$ oder $\frac{b}{t} \in \langle S^{-1}R\rangle$
b) $1 \notin \langle S^{-1}p\rangle$
$\langle S^{-1}p\rangle = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in p, s \in\mid S\rangle\right\}$
$\frac{ab}{st} = \frac{c}{r}$ mit $c \in p \Rightarrow \exists u \in\mid S\rangle, \underbrace{ur}_{\notin p}(ab) = \underbrace{ustc}_{\in p}$
$\Rightarrow ab \in p \Rightarrow a \in p$ oder $b \in p$
(1) $can^{-1}\langle S^{-1}p\rangle = p$. Zeige: Gegeben $c \in can^{-1}\langle S^{-1}p\rangle$, also $\frac{c}{1} \in \langle S^{-1}p\rangle$
also $\frac{c}{1} = \frac{a}{s}$ mit $a \in p, s \in\mid S\rangle$, so $\exists r \in\mid S\rangle$ mit $\underbrace{rs}_{\notin p} c = \underbrace{ra}_{\in p} \Rightarrow c \in p$

□

Korollar Der Schnitt aller Primideale einer Krings ist sein Nilradikal $\sqrt{\langle 0\rangle}$

Beweis:$p \in \mathrm{Spec}R \Rightarrow p \supset \sqrt{\langle 0\rangle}$.
$f \notin \sqrt{\langle 0\rangle} \Rightarrow R_f \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Spec}R_f \neq \emptyset \Rightarrow \{p \in \mathrm{Spec}R \mid p \cap \{f\} = \emptyset\} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists p \in \mathrm{Spec}R, f \notin p$

□

Korollar R Ring, $I \subset R$ Ideal. Dann: $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{p \in \mathrm{Spec}R \\ p \supset I}} p$

Beweis:$can^{-1}(\sqrt{0}) = \sqrt{I}, can^{-1}(\mathrm{Spec}R/I) = \{p \in \mathrm{Spec}R \mid p \supset I\}$

□

Proposition 1 In einem noetherschen Ring gibt es nur endlich viele minimale Primideale
R kom. Ring $\rightsquigarrow \mathrm{Spec}R$

$I \mapsto \mathcal{Z}(I) = \{p \in \mathrm{Spec}R \mid p \supset I\}$
Diese bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf Spec$R$, der Zariski-Topologie, denn $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(IJ)$:
$p \notin \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) \Rightarrow p \notin \mathcal{Z}(IJ)$
$\Rightarrow \exists a \in I \setminus p, b \in J \setminus p \Rightarrow ab \notin p$

Bemerkung $p \in$Spec, $a_1, ..., a_r \subset R$ Ideale, $p \supset a_1 \cap ... \cap a_r \Rightarrow p \supset a_i$ für ein i.

Proposition 2 R Kring
Spec$R \xrightarrow{\sim} \{y \subset \mathrm{Spec}R$ abgeschlossen $\mid y$ irreduzibel$\}$
$x \to \overline{x}$

*Beweis:*In jedem topologischen Raum ist der Abschluss eines Punktes irreduzibel
Surjektiv: $Y \subset$Spec$R$ irreduzibel $\Rightarrow Y = \mathcal{Z}(I)$ für $I \subset R$ (oBdA I Radikal)
Falls Y irreduzibel, so ist I Primideal, denn I nicht prim $\Rightarrow \exists a, b \notin I$ mit $ab \in I$
$\Rightarrow \mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) \supset \mathcal{Z}(I)$, aber:
$a \notin I \Rightarrow \exists p \in$Spec$R, p \supset I, a \notin p \Rightarrow p \notin \mathcal{Z}(a) \not\supset \mathcal{Z}(I) \ni p$
Genauso $\mathcal{Z}(b) \not\supset \mathcal{Z}(I)$
$\Rightarrow \mathcal{Z}(I) = (\mathcal{Z}(a) \cap \mathcal{Z}(I)) \cup (\mathcal{Z}(b) \cap \mathcal{Z}(I))$
Injektiv:$\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow p_x \supset p_y, p_y \supset p_x \Rightarrow p_x = p_y$

□

Beweis (Proposition 1):R noetherscher Kring $\Rightarrow$Spec$R$ noetherscher Raum
$\Rightarrow$ zerfällt in endlich viele irreduzible Komponenten

□

Definition 2.9 R Kring, $M \in R$-Modul, $S \subset R$. Erkläre einen $S^{-1}R$-Modul: $S^{-1}M = (M \times \mid S\rangle)/\sim$ mit $(m, s) \sim (n, t) \Leftrightarrow \exists r \in\mid S\rangle : rsn = rtm$
$\frac{m}{s} := [(m, s)]$ mit üblicher Addition/Multiplikation (ist wohldefiniert)

Bemerkung $can : M \to S^{-1}M$
$m \mapsto (\frac{m}{1})$ ist Homomorphismus von R-Moduln
$can(m) = 0 \Leftrightarrow \exists s \in\mid S\rangle$ mit $sm = 0$

Proposition $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakte Sequenz von R-Moduln (exakt: im$f$ =ker$g$), so:
$S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ auch exakt

Lemma 2.3 (Universelle Eigenschaft von $can : M \to S^{-1}M$) Ist N ein $S^{-1}R$-Modul, so liefert das Vorschalten von *can* eine Bijektion: $\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, N) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_R(M, N)$

Beweis (Proposition): $g \circ f$ ist unten auch Null
$\not{Z}\!\!\mathbb{Z} : g(\frac{m}{s}) = 0$ so $\exists \frac{m'}{s'} \in S^{-1}M'$ mit $f(\frac{m'}{s'}) = \frac{m}{s}$
$g(\frac{m}{s}) = \frac{g(m)}{s} \Rightarrow \exists t \in | S\rangle$ mit $tg(m) = g(tm) = 0$
$\Rightarrow \exists m' \in M'$ mit $f(m') = tm \Rightarrow f(\frac{m'}{ts}) = \frac{m}{s}$

□

Behauptung $S^{-1}(M \oplus N) = S^{-1}M \oplus S^{-1}N$

Definition 2.10 C Kategorie, $X, Y \in C$. Ein *Produkt* von X mit Y ist ein Tripel (P, pr_X, pr_Y) aus $P \in C$ Objekt, $pr_X : P \to X$, $pr_Y : P \to Y$ Morphismen, so dass gilt: Gegeben $A \in C$ und $a_X : A \to X$, $a_Y : A \to Y$ gibt es genau ein $a : A \to P$ mit $pr_X \circ a = a_X$ und $pr_Y \circ a = a_Y$

Beispiel 2.5 Ens Kategorie der Mengen: $X \times Y$ mit Projektionen, für $A \to X$ und $A \to Y$ gibt es genau eine Abbildung $A \to X \times Y$ mit besagter Eigenschaft.

Eindeutigkeit von Produkten (P, pr_X, pr_Y) und $(\tilde{P}, \tilde{pr}_X, \tilde{pr}_Y)$ Produkte von X mit Y, so existiert genau ein Iso $P \overset{c}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \tilde{P}$ mit $\tilde{pr}_X \circ c = pr_X$ und $\tilde{pr}_Y \circ c = pr_Y$

2.1 Endliche Länge

Definition 2.11 Ein Modul heißt *einfach* gdw es genau zwei Untermoduln hat: sich selbst und die Null

Beispiel 2.6 Die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p prim
R kommutativer Ring, so habe Bijektion

$$\left\{\begin{smallmatrix}\text{einfache } R\text{-Moduln} \\ \text{bis auf Iso}\end{smallmatrix}\right\} \overset{\sim}{\longleftarrow} \mathrm{Max} R$$
$$R/\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m}$$
$$M \to Ann_R M := \{r \in R \mid \forall m \in M : rm = 0\}$$

M einfach $\Rightarrow M = Rm \forall m \in M \setminus 0 \Rightarrow Ann_R m \hookrightarrow R \twoheadrightarrow M, r \mapsto rm \Rightarrow R/Ann_r m \simeq M$

Insbesondere Einfache $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$-Moduln alle eindimensional über $\mathbb{C}$
$\Rightarrow$ Einfache $k[X_1, ..., X_n]$-Moduln für k Körper sind endlichdimensional über k

Beispiel 2.7 Jeder Ring $R \neq 0$ besitzt einfachen Modul, nämlich $R/\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}$ maximales Linksideal

Lemma 2.4 Sei R Ring, E, E' einfache R-Moduln, M ein R-Modul

1. Jeder Homo $E \to M$ ist injektiv oder Null (Da Ker$\subset E$ Untermodul)
2. Jeder Homo $M \to E'$ ist surjektiv oder Null (Da Im$\subset E'$ Untermodul)
3. $\Rightarrow$ Jeder Homo $E \to E'$ ist bijektiv oder Null
4. End$_R E$ ist Schiefkörper

Definition 2.12 Die *Länge* eines Moduls ist

$$l(M) := \sup \left\{ r \geq 0 \mid {\scriptstyle \exists 0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M \atop \text{Kette von Untermoduln}} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Beispiel 2.8 $l(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$
$l(M) = 1 \Leftrightarrow M$ einfach
k Körper, $V \in k$-Mod, $l(V) =$dim$_k V$

Definition 2.13 Eine *Kompositionsreihe* eines Moduls M ist eine Folge von Untermoduln $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_r = M$ mit der Eigenschaft, dass $\underbrace{M_i/M_{i-1}}_{\text{Subquotient der Kompositionsreihe}}$ einfach für alle i
Die *Kompositionslänge* $\lambda(M) \in \mathbb{N} \sup \{\infty\}$ ist

$$\lambda(M) = \left\{ {\text{Die kleinstmögliche Länge einer Kompositionsreihe} \atop \text{wenn es eine gibt, } \infty \text{ sonst}} \right\}$$

Satz 2.6 (Jordan-Hölder) Für jeden Modul M gilt: $l(M) = \lambda(M)$ und im Fall endlicher Länge haben je zwei Kompositionsreihen die selbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten.

Beispiel 2.9 $R = \mathbb{C}[X]$, $M \in \mathbb{C}[X]$-Modul ist $\mathbb{C}$-Vektorraum M mit $(X\cdot) \in$End$_{\mathbb{C}} M$
M endliche Länge $\Leftrightarrow$dim$_{\mathbb{C}} M < \infty$
$l(M) < \infty, E$ einfach $[M : E] = \# \{i \mid E \simeq M_i/M_{i-1}\} \in \mathbb{N}$ (Jordan-Hölder-Multiplizität von E in M)

Beweis (Jordan Hölder): Klar $l(M) \geq \lambda(M)$
Zeige: $\lambda(M) < \infty$ und $N \subset M$ Untermodul mit $N \neq 0$, so $\lambda(M/N) < \lambda(M)$.
Denn sei $0 = M_0 \subset ... \subset M_\lambda = M$ Kompositionsreihe mit $\lambda = \lambda(M)$

$\rightsquigarrow 0 = \overline{M}_0 \subset ... \subset \overline{M}_\lambda = M/N$ ihre Bilder in M/N. Habe kurze exakte Sequenz:

$$M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \overline{M}_i/\overline{M}_{i-1}$$

$$\begin{tikzcd}
M_{i-1} \cap N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M_{i-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \overline{M}_{i-1} \arrow[d] \\
M_i \cap N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M_i \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \overline{M}_i \arrow[d] \\
M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \arrow[r, hook] & M_i/M_{i-1} \arrow[r, two heads] & \overline{M}_i/\overline{M}_{i-1}
\end{tikzcd}$$

...äääähm, ja... :D
Ist $N \neq 0$ so gibt es i mit $N \cap M_{i-1} \subsetneq N \cap M_i$. Also liefern die $\overline{M}_i$ exakt kürzere Kompositionsreihen von M/N, also $\lambda(M/N) < \lambda(M)$. Es folgt $l(M) \leq \lambda$ für jede Kompositionsreihe von M endlicher Länge etc.

□

Korollar $M \supset N$ Moduln, $L(M) = l(M/N) + l(N)$

Beweis: $L(M) \geq l(M/N) + l(N)$ klar.
$\lambda(M) \leq \lambda(M/N) + \lambda(N)$

□

Lemma 2.5 von Nakayama Sei R Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ Ideal, M endlich erzeugter R Modul $m_1, ..., m_r \in M$ erzeugen $M/\mathfrak{a}M$ (Summen eingeschlossen), so gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ derart, dass $m_1, ..., m_r$ bereits $M[f^{-1}]$ (Lokalisierung) über $R[f^{-1}]$ erzeugen

Beispiel 2.10 $k = \overline{k}$, $X \subset k^n$ abgeschlossen, $R = \mathcal{O}(X)$
$\mathfrak{a} = m_x = \mathcal{I}(x) \in$Max$\mathcal{O}(X)$, $M \in \mathcal{O}(X)$

Beweis: Zunächst beschränken wir uns auf den Fall $r = 0$: $M/\mathfrak{a}M = 0 \Rightarrow \exists f \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $M[f^{-1}] = 0$
Sei dazu $N = \langle m_1, ..., m_r \rangle_R \subset M$

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{a}M \cap N) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{a}M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathfrak{a}Q \arrow[d, hook] \\
N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Q = M/N \arrow[d] \\
\overline{N} \arrow[r, hook] & M/\mathfrak{a}M \arrow[r, two heads] & Q/\mathfrak{a}Q
\end{tikzcd}$$

$N \twoheadrightarrow M/\mathfrak{a}M \Rightarrow Q/\mathfrak{a}Q = 0 \Rightarrow \exists f \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $Q[f^{-1}] = 0$

$\Rightarrow N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} M[f^{-1}]$
Beweis für $r = 0$: $Q/\mathfrak{a}Q = 0 \Rightarrow \exists f \in 1 + \mathfrak{a} =: S$ mit $Q[f^{-1}] = 0$ durch Widerspruch. Sonst $t \geq 1$ kleinstmöglich, so dass $q_1, ..., q_t$ erzeugen $S^{-1}Q$ über $S^{-1}R$. Reicht $\mathbb{Z}S^{-1}Q = 0$ ...

□

Lemma 2.6 von Nakayama für lokale Kringe Sei R lokaler Kring ($\mathrm{Max}R = \{\mathfrak{m}\}$), M endlich erzeugter R-Modul
$m_1, ..., m_r$ erzeugen $M/\mathfrak{m}M$, so erzeugen $m_1, ..., m_r$ schon M selber, insbesondere: $M = \mathfrak{m}M \Rightarrow M = 0$

Beispiel 2.11 $R = k[[X]] \supset Xk[[X]] = \mathfrak{m}$, $M \in k[[X]]$-Modul endlich erzeugt, $M = XM \Rightarrow M = 0$
Für $M = k((X))$ gilt $M = X = M$

Beweis: $1 + \mathfrak{m} \subset R^\times$, folgt aus oben.

□

Bemerkung R Kring, $\mathrm{Max}R = \{\mathfrak{m}\}$, so $1 + \mathfrak{m} \subset R^\times$, denn $a \in \mathfrak{m}$ und $1 + a \notin R^\times$, so existiert max Ideal m' mit $m' \ni 1 + a$. Bei lokalen Ringen folgt $1 + a \in \mathfrak{m}$, dann $1 \in \mathfrak{m}$ ↯

Satz 2.7 Für einen Kring $R \neq 0$ sind gleichbedeutend:

1. R ist von endlicher Länge als R-Modul
2. R ist noethersch mit $\mathrm{Kdim}R = 0$ (Jedes Primideal ist maximal)
3. R ist *Arten'sch*, also jede absteigende Kette von Idealen wird stationär

Beispiel 2.12 $k[T]/\langle T^n \rangle$, $k[X,Y]/\langle X^n, XY, Y^n \rangle$

Beweis: 2⇒1: R noethersch ⇒ R hat endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r$ und $\sqrt{0} = \mathfrak{m}_1 \cap ... \cap \mathfrak{m}_r$
$\mathrm{kdim}R = 0 \Rightarrow$Das sind genau die maximalen Ideale $\Rightarrow 0 = (\mathfrak{m}_1 \cdot ... \cdot \mathfrak{m}_r)^N$
$\rightsquigarrow R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset ... \supset 0 \rightsquigarrow \ell(R) < \infty$
1⇒ 2:

Definition 2.14 Das *Jacobson-Radikal* eines Krings ist der Schnitt aller maximalen Ideale

Lemma 2.7 $\bigcap\limits_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max} R} \mathfrak{m} = \{a \in R \mid ra + 1 \in R^\times \forall r \in R\}$

Beweis:$\supset$: $A \notin \mathfrak{m} \Rightarrow \exists r$ mit $ra \in 1 + \mathfrak{m} \Rightarrow ra - 1 \notin R^\times$
$\subset$: $a \notin \{|\} \Rightarrow \exists r$ mit $ra + 1 \notin R^\times \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \ni ra + 1 \Rightarrow a \notin \mathfrak{m}$

□

$l(R) < \infty \Rightarrow R$ hat endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r \Rightarrow J = \mathfrak{m}_1 \cap ... \cap \mathfrak{m}_r$ erfüllt $\bigcap J^n = 0 \Rightarrow \exists n$ mit $J^n = 0 \Rightarrow$ Für jedes Primideal p hat $p \supset J^n \Rightarrow p \supset \mathfrak{m}_i$ für ein i

□

Lemma 2.8 von N, für lokale Kringe Sei R Kring, J Jacobson-Radikal. M endlich erzeugter R-Modul. $m_1, ..., m_r$ erzeugen M/JM, so erzeugen $m_1, ...m_r$ schon M selber, insbesondere $M = JM \Rightarrow M = 0$

Proposition R noetherscher Kring, J Jacobson-Radikal, M endlich erzeugter R-Modul. So gilt $S := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \langle J^n M\rangle = 0$

Beweis: $R[X] \supset \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} J^n X^n$ ("Rees-Ring") $= \{\sum a_n X^n \mid a_n \in J^n\}$
$\rightsquigarrow R[Y_1, ..., Y_r] \twoheadrightarrow$Rees-Ring, $Y_p \to j_p X \Rightarrow$ Rees-Ring noethersch
$M[X] \supset \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} (J^n M)X^n$ endlich erzeugter Modul über Rees-Ring $\supset S[X]$ endlich erzeugt über Rees-Ring
OBdA erzeugt von $S \oplus SX \oplus ... \oplus SX^m \Rightarrow JS = S \Rightarrow S = 0$ mit Nakayama

□

Ganze Ringerweiterungen

Definition 2.15 $A \subset B$ Kringerweiterung

1. $b \in B$ ist *ganz über* A gdw $\exists P \in A[T]$ normiert mit $P(b) = 0$
2. Die Kringerweiterung $A \subset B$ heißt *ganz* gdw jedes $b \in B$ ganz über A ist

Satz 2.8 Jede endliche Kringerweiterung ist ganz

Beweis:$A \subset B$ mit $B = Ab_1 + ... + Ab_n$.

$$\begin{pmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(M - bI) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_M(b) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \chi_M(b) = 0$

□

Satz 2.9 Jede ganze Kringerweiterung von endlichem Typ ist endlich

Beweis: $A \subset A[X_1, ..., X_n] = B$
$A \subset A[X_1] \subset A[X_1, X_2] \subset ... \subset B$ alle endlich

□

Lemma 2.9 $A \subset B$ Kringerweiterung, $C = \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ ist Teilring von B und heißt *ganzer Abschluss* von A in B

Beweis: $b_1, b_2 \in C \Rightarrow A[b_1, b_2]$ endlich über $A \Rightarrow$ alle $b \in A[b_1, b_2]$ ganz über A
$\Rightarrow b_1 b_2, b_1 + b_2 \in C$

□

Proposition (Transitivität) $A \subset B \subset C$ Kringe. B ganz über A und C ganz über B, dann C ganz über A

Beweis: $c \in C$. Finde Ganzheitsgleichung $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + ... + b_0 = 0, b_i \in B$
$A \subset A[b_0, ..., b_{n-1}] \subset A[b_0, ..., b_{n-1}, c]$, A endlich

□

Lemma 2.10 (Sandwich) $B \supset A \supset k$, $B \supset A$ endlich, $B \supset k$ von endlichem Typ, k noethersch $\Rightarrow A \supset k$ von endlichem Typ.

Going-up $A \subset B$ ganze Kringerweiterung

1. Gegeben $b \in B$ Ideal und $P \subset A$ Primideal mit $P \supset (b \cap A)$ gibt es $p \subset B$ Primideal mit $p \cap A = P$ und $p \supset b$

(Insbesondere Spec$B \overset{\cap A}{\twoheadrightarrow}$Spec$A$)

2. $P \subsetneq Q$ Primideale in B, so $(P \cap A) \subsetneq (Q \cap A)$

Korollar Ist $A \subset B$ ganze Ringerweiterung, so $k$dim$A = k$dim$B$

Lemma 2.11 Sei $A \subset B$ ganz von Integritätsbereichen, so gilt A Körper gdw B Körper

Beweis:$\Rightarrow$: $b \in B \Rightarrow b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_0 = 0$. Falls $b \neq 0$, so darf annehmen $a_0 \neq 0$
$b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + ... + a_1)a_0^{-1} = 1$
$\Leftarrow$: $a \in A \setminus \{0\} \rightsquigarrow a^{-1} = b \in B \rightsquigarrow b + a_{n-1} + a_{n-2}a + ... = 0 \Rightarrow b \in A$

□

Lemma 2.12 $A \subset B$ ganz, $P \in$Spec$B$. $P \in$Max$B \Leftrightarrow (P \cap A) \in$Max$A$

Beweis:$A/(P \cap A) \subset B/P$
$P \cap A \in$Max$A \Leftrightarrow A/(P \cap A)$ Körper$\Leftrightarrow B/P$ Körper$\Leftrightarrow P \in$Max$B$

□

Beweis (Going-Up): 1: $P \subset \underbrace{A/(b \cap A)}_{=:\overline{A}} \subset \underbrace{B/b}_{=:\overline{B}}$

$P \twoheadrightarrow \overline{P} \subset \overline{A}$ ganz, $S = \overline{A} \setminus \overline{P}$

$$\begin{array}{ccccccc} B & \twoheadrightarrow & \overline{B} & \longrightarrow & S^{-1}\overline{B} & & \\ \cup & & \cup & & \cup & & \\ A & \twoheadrightarrow & \overline{A} & \longrightarrow & S^{-1}\overline{A} & \leftarrow\cdots & S^{-1}\overline{P} \end{array}$$

...ausgestiegen

□

Lemma 2.13 (Noether's Normalisierungslemma) Sei k Körper, A ein k-Kring von endlichem Typ. So gibt es $x_1, ..., x_d \in A$ algebraisch über k mit A ganz über $k['x_1, ..., x_d] \subset A$. Kann sogar erreichen, dass $d <$Kardinalität jedes algebraisch abhängigen Erzeugendensystems des k-Krings A

Beispiel 2.13 $k = \overline{k}, X \subset k^n$ abgeschlossen, $A = \mathcal{O}(X)$

Proposition k Körper, $f \in k['X_1, ..., X_n] \setminus k$, so gibt es eine Einbettung von k-Kringen $k['Y_1, ..., Y_{n-1}] \hookrightarrow k[X_1, ..., X_n]/\langle f \rangle$ die ganze Ringerweiterung ist.

Beweis: Zunächst für $|k| = \infty$: Sei $\sum c_\alpha X^\alpha$ die homogene Komponente höchsten Grades von f
Es gibt $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in k^n \setminus 0$ mit $f_d(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$. Lineare Koordinationtransformation $\rightsquigarrow$ oBdA $f_d(0, 0, ..., 0, 1) \neq 0$. Die Koordinaten X_i entsprechen Koordinaten Y_i, $f_d = (\neq 0)Y_n^d + ... \rightsquigarrow f = Y_n^d + (\in k[Y_1, ..., Y_{n-1}])Y_n^{d-1} + ... \rightsquigarrow \overline{Y}_n \in k[X_1, ..., X_n]/\langle f \rangle$ ganz über $k[Y_1, ..., Y_{n-1}]$
k beliebig: Wähle $Y_1 = X_i + X_n^{r_i}$ für $i = 1, ..., n-1$ und $Y_n = X_n$. Suche r_i so, dass $f(Y_1, ..., Y_n)$ normiert in $k[Y_1, ..., Y_{n-1}][Y_n]$
$f = \sum_\beta x_\beta X^\beta$. Wähle β maximal in der lexikographischen Ordnung mit $x_\beta \neq 0$. Wähle r_i so, dass $\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + ... + \beta_n > \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + ... + \alpha_n$ für alle α mit $c_\alpha \neq 0$
induktiv von oben, so dass $\beta_i r_i + ... + \beta_n > \alpha_i r_i + ... + \alpha_n$ für alle α, die erst in der i-ten Stelle verschieden ist von β

□

Beweis Noether: $k[X_1, ..., X_n] \twoheadrightarrow k[x_1, ..., x_n] = A \twoheadleftarrow k[X_1, ..., X_n]/\langle f \rangle \hookleftarrow k[Y_1, ..., Y_{n-1}$ ganz
Siehe Soergel-Skript

□

Satz 2.10 k Körper, $\mathrm{kdim} k[X_1, ..., X_d] = d$ ($k = \overline{k} \Rightarrow \mathrm{kdim}(k^d) = d$)

Beweis: $\mathrm{kdim} k[X_1, ..., X_d] \geq d$ klar.
Zeige $\leq$. Induktion über d, $0 \neq p \subset k[X_1, ..., X_d]$ primideal.
$k[X_1, ..., X_d]/p \supset k[Y_1, ..., Y_i], i < d$ ganz, $\mathrm{kdim} k[X_1, ..., X_d]/p = \mathrm{kdim} k[Y_1, ..., Y_i] = i < d$

□

Satz 2.11 k Körper, $f \in k[X_1, ..., X_n] \setminus k$, so $\mathrm{kdim}(k[X_1, ..., X_n]/\langle f \rangle) = n - 1$

Beweis: nach Proposition

□

Definition 2.16 Sei K/k Körpererweiterung. $E \subset K$ heißt *System von Transzendenzerzeugern* gdw K algebraisch über $k(E)$ (=kleinser Teilkörper von K, der k und E enthält)
E heißt *algebraisch unabhängig* gdw $\forall X_1, ..., X_n \in E$ paarweise verschieden $k[X_1, ..., X_n] \to K$ mit $X_i \mapsto x_i$ injektiv ist
$E \subset K$ heißt *Transzendenzbasis* gdw Transzendenzmenge und algebraisch unabhängig.

Falls $\{X_1, ..., X_n\} = E$ Transzendenzbasis, $\Leftrightarrow |E| = n$, $k(X_1, ..., X_n) \subset K$ algebraische Körpererweiterung

Ziel Je zwei Transzendenzbasen von K/k haben gleich viele Elemente $\rightsquigarrow$trgr$(K(k)$ =trgr$_k(K)$

Satz 2.12 $X \subset k^n$ irreduzibel und abgeschlossen, $k = \overline{k}$, kdim(X) =trgr$_k$(Quot$\mathcal{O}(X)$)

Satz 2.13 k Körper, AQ k-Kring von endlichem Typ. A Integritätsbereich, so kdim$A$ =trgr$_k$(Quot$A$)

Satz 2.14 (Austauschlemma) K/k Körpererweiterung, $E \subset K$ Transzendenzerzeuger, $A \subset K$ algebraisch unabhängig. So $\exists \varphi : A \hookrightarrow E$ injektiv mit $(E \setminus \varphi(A)) \cup A$ wieder Transzendenzerzeuger.

*Beweis:*Sei $B \subset A$ maximal, so dass es $\varphi : B \hookrightarrow E$ gibt mit $(E \setminus \varphi(B)) \cup B$ Transzendenzerzeuger.
Z.Z. $B = A$. Sonst sei $a \in A \setminus B$. Sei $K' = k((E \setminus \varphi(B)) \cup B)$. $\exists P \in K'[T] \setminus 0$ mit $P(a) = 0$
$\exists P \in k[X, X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_r]$ so dass $b_1, ..., b_n \in B, e_1, ..., e_r \in E \setminus \varphi(B)$ so dass bei Einsetzen $X_i \to b_1, Y_j \to e_j$ ein Polynom$\neq 0$ in $K'[X]$ entsteht mit $P(a) = 0$. Darf r kleinstmöglich annehme ($r \geq 1$, da A algebr. undabhängig). Schreibe $P = \sum\limits_{\mu} P_\mu Y_1^\mu$ mit $P_\mu \in k[X, X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_r]$.
Für mindestens ein μ ist $P_\mu(X, b_1, ..., b_n, e_2, ..., e_r)$ nicht das Nullpolynom in X. Dann $P_\mu(a, b_1, ..., b_r, e_2, ..., e_r) \neq 0 \Rightarrow \sum P_\mu(a, b_1, ..., b_r, e_2, ..., e_r) Y_1^\mu$ nicht das Nullpolynom, aber wird Null bei $Y_1 = e_1$, also e_1 algebraisch über $(E \setminus \varphi(B)) \setminus \{e_1\} \cup \{a\}$

□

Satz 2.15 (Going-Down) $A \subset B$ ganze Kringerweiterung, beide Integritätsbereiche, A ganz abgeschlossen (in Quot$A$). Gegeben $p \in$Spec$B$, $Q \in$Spec$A$ mit $Q \subset A \cap p$ gibt es $q \in$Spec$B$ mit $q \subset p$ und $Q = A \cap q$

Beweis: R Kring, $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_r \subset R$ Ideale, $p \subset R$ Primideal.
$p \supset \mathfrak{a}_1 \cap ... \cap \mathfrak{a}_r \Rightarrow p \supset \mathfrak{a}_1 \cdot ... \cdot \mathfrak{a}_r \Rightarrow \exists i : p \supset \mathfrak{a}_i$

Lemma 2.14 R Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ Ideal, $p_1, ..., p_n$ Primideale. $\mathfrak{a} \subset p_1 \cup ... \cup p_n \Rightarrow \exists i : \mathfrak{a} \subset p_i$
$\mathfrak{a} \not\subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(p_i)) \forall i \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subset \mathcal{I}(\bigcup \mathcal{Z}(p_i))$

...

□

Definition 2.17 Ein Kring heißt *Kettenring* gdw jede nicht verfeinerbare Primidealkette hat die selbe Länge und Krulldimension$< \infty$

Satz 2.16 Jeder Integritätsbereich von endlichem Typ über einem Körper ist ein Kettenring

Bemerkung A faktoriell $\Rightarrow A$ ganz abgeschlossen

Satz 2.17 (Krull's Hauptidealsatz) R noetherscher Kring, $f \in R$, $\mathfrak{p} \in$Spec$R$ minimal unter den Primidealen in f
So gilt $1 \geq h(\mathfrak{p}) :=$kdim$(R_\mathfrak{p}) = \sup\{\ell \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{p}$ Kette in Spec$R\}$

Bemerkung $k = \overline{k}, X \subset k^n$ abgeschlossen, $R = \mathcal{O}(X)$
Spec$\mathcal{O}(R) \tilde{\leftrightarrow} \{Y \subset X$ abgeschlossen $\mid Y$ irreduzibel$\}$
$h(\mathfrak{p}) \leftrightarrow \sup\{\ell \mid Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq ... \subsetneq Y_\ell = Y\}$
$\mathfrak{p} \leftrightarrow Y$
Ist f kein Nullteiler, so $h(\mathfrak{p}) = 1$

R Kettenring $\Rightarrow$kdim$R =$kdim$(R/\mathfrak{p}) + h(\mathfrak{p}) \forall \mathfrak{p} \in$Spec$R$
$X \subset k^n$ abgeschlossen, irreduzibel$\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ Kettenring
$Y \subset X$ abgeschlossen, irreduzibel $\Rightarrow$kdim$X =$kdim$Y + h(\mathcal{I}(Y))$

Definition 2.18 $Y \subset X$ abgeschlossen, beide irreduzibel: codim$(Y \subset X) :=$kdim$X-$kdim$Y = h(\mathcal{I}(Y))$ *Kodimension*

Krull: X irreduzibel, $f \in \mathcal{O}(X), f \neq 0$ so hat jede irrteduzible Komponente Y von $\mathcal{Z}(f)$ die Kodimension Eins.

Korollar $k = \overline{k}$, $X \subset k^n$ abgeschlossen, $\mathcal{O}(X)$ faktoriell:
$$\left\{\substack{\text{Irreduzible Elemente von } \mathcal{O}(X) \\ \text{bis auf } \mathcal{O}(X)^\times}\right\} \tilde{\leftrightarrow} \left\{Y \subset X \text{ abgeschlossen} \mid \substack{Y \text{ irreduzibel} \\ \text{codim}(Y \subset X) = 1}\right\}$$
$[f] \mapsto \mathcal{Z}_X(f)$

Satz 2.18 X irreduzibel, $f_1, ..., f_s \in \mathcal{O}(X)$, so hat jede irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}_X(f_1, ..., f_s)$ höchstens Kodimension s, kdim$Y \geq$kdim$X - s$

Satz 2.19 X irreduzibel, $Y \subset X$ abgeschlossen und irreduzibel, codim$(Y \subset X) = s$ so gibt es $f_1, ..., f_s \in \mathcal{O}(X)$ mit Y ist irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1, ..., f_s)$

Satz 2.20 $Y, Z \subset X \subset k^n$, alle abgeschlossen und irreduzibel, so gilt für jede irreduzible Komponente W von $Y \cap Z$ die Abschätzung codim$(W \subset X) \leq$codim$(Y \subset X)$+codim$(Z \subset X)$
Also: kdim$W \geq$kdim$Y$+kdim$Z$-kdim$X$

Filtrierung und Graduierung

A abelsche Gruppe
Filtrierung: Folge von Untergruppen $A... \supset A^{\geq 0} \supset A^{\geq 1} \supset ...$
Graduierung: Folge von Untergruppen $(A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} A^i \xrightarrow{\sim} A$

Bei Filtrierung von Ring fordere zusätzlich

1. $A^{\geq i} \cdot A^{\geq j} \subset A^{\geq i+j}$
2. $1_A \in A^{\geq 0}$

Bei Graduierung von Ring fordere zusätzlich $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$

Definition 2.19 Filtrierung heißt *Hausdorff* gdw $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}} A^{\geq i} = 0$

Definition 2.20 Filtrierung heißt *bei Null beginnend* gdw $\exists i$ mit $A^{\geq i} = 0$

Definition 2.21 Filtrierung heißt *ausschöpfend* gdw $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} A^{\geq i} = A$ und *vollendend* gdw $\exists i$ mit $A^{\geq i} = A$

$(A^{\geq i})_{i\in\mathbb{Z}}$ Filtrierung auf $A \rightsquigarrow$gr$A = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} A^{\geq i}/A^{\geq i+1}$ *assoziierte(r) graduierte(r) Gruppe(Ring)*

Hilbert-Polynom

Satz 2.21 k Körper, $M = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ graduierter endlich erzeugter Modul über $k[X_1, ..., X_n]$, so existiert genau ein Laurent-Polynom $f_M \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ so dass $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} (\dim_R M^i)t^i = \frac{f_M(t)}{(1-t)^n}$

Satz 2.22 (Hilbert-Polynom) k Körper, M endlich erzeugter graduierter $k[X_1, ..., X_n]$-Modul, so gibt es $P_M \in \mathbb{Q}[t]$, so dass dim$M^{\leq i} = P_M(i)$ für i hinreichend groß.
Dieses *Hilbert-Polynom* ist eindeutig und hat Grad$\leq n$

Definition 2.22 Ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[T]$, das für $i \in \mathbb{N}$ ganzzahlige Werte hat heißt *numerisches Polynom*
Die numerischen Polynome sind genau alle ganzzahligen Linearkombinationen der $\begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix}$ und nehmen sogar auf $\mathbb{Z}$ nur ganzzahlige Werte an

Bemerkung Hat ein numerisches Polynom mit Koeffizienten a_i Grad d, so ist $(d!)a_d \in \mathbb{Z}$

Satz 2.23 $(A, \mathfrak{m})$ lokaler noetherscher Kring, $q \subset A$ Ideal mit $\sqrt{q} = \mathfrak{m}$, M endlich erzeugter A-Modul

1. $\exists! P_M^q \in \mathbb{Q}[t]$ mit $P_M^q(i) = \ell(M/q^i M)$ für hinreichend großes i
2. P_M^q und $P_M^{\mathfrak{m}}$ haben den selben Grad, er heißt hdim(M) Hilbertdimension von M

Satz 2.24 (Hauptsatz über Dimension lokaler noetherscher Kringe) $(A, \mathfrak{m})$ lokaler noetherscher Kring, so stimmen überein:

1. kdim$A$
2. hdim$A$
3. $\delta(A)$ die kleinsmögliche Zahl von Elementen, die ein Ideal $q \subset A$ mit $\sqrt{q} = \mathfrak{m}$ erzeugen.

Korollar Die Krulldimension von noetherschen lokalen Kringen ist endlich

Korollar (Krullverallgemeinerung) A noethersch, $f_1, ..., f_s \in A$ Jedes $p \in$Spec$A$ mit p minimal über $\langle f_1, ..., f_s \rangle$ hat Höhe $h(p) \leq s$

Proposition $(A, \mathfrak{m})$ lokal noethersch, $\sqrt{q} = \mathfrak{m}$, M endlich erzeugter A-Modul
Ist $f : M \hookrightarrow M$ injektiver Modulhomomorphismus, so gilt hdim(cok$f$) <hdim$M$

Proposition $(A, \mathfrak{m}), \sqrt{q} = \mathfrak{m}$
Ist $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln, so gilt hdim(M) =max(hdimM',hdimM'')
mult$_q^d M$ =mult$_q^d(M')$+mult$_q^d(M'')$

Satz 2.25 $f : M \hookrightarrow M$ injektiver Homo von A-Moduln, so hdim(cok$f$) <hdim(M)

Definition 2.23 $A \supset \mathfrak{a}$ Ring mit Ideal, $A \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supset ...$
M ein A-Modul. Eine verträgliche Filtrierung $... \supset M^{\geq 0} \supset M^{\geq 1} \supset ...$ auf M heißt $\mathfrak{a}$-*stabil* gdw exakt bei M und $\exists d$ mit $M^{\geq d+i} = \mathfrak{a}^i M^{\geq d} \forall i \geq 0$

Proposition A noethersch, $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal, M noetherscher Modul

1. Sind $\Gamma^{\geq i}M, \Omega^{\geq i}M$ zwei $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierungen, so vergleichbar, d.H.
   $\exists k$ mit $\Gamma^{\geq i+k}M \subset \Omega^{\geq i}M \subset \Gamma^{i-k}M \forall i$
2. Ist $N \subset M$ Untermodul, so ist induzierte Filtrierung von $\mathfrak{a}$-stabiler Filtrierung wieder $\mathfrak{a}$-stabil

Proposition $(A, \mathfrak{m})$ noethersch, lokal, $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$, so hdim$(M) = \max\{$hdim$(N)$,hdim$(Q)\} = d$ und es gilt: mult$^d M$ =mult$^d N$+mult$^d Q$

Definition 2.24 $k = \overline{k}, X \subset k^n$ abgeschlossen, $x \in X$. X heißt *glatt bei* x und x heißt regulärer Punkt von X gdw $\exists f_1, ..., f_r \in k[T_1, ..., T_n]$ mit

1. $\exists U \subset k^n$ offen mit $x \in U$ und $X \cap U = \mathcal{Z}(f_1, ..., f_r) \cap U$ so dass
2. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(x)\right)_{j=1}^n = (\text{grad} f_i)(x)$ linear unabhängig

Definition 2.25 $(A, \mathfrak{m})$ noetherscher lokaler Kring heißt *regulär* gdw kdim$A$ =$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$

Satz 2.26 $x \in X$ regulär gdw $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär

fehlt

Definition 2.26 Sei k Kring. Ein *k-geringter Raum* $X = (X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum X mitsamt einer Vorschrift, die jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ eine Teilringalgebra $\mathcal{O}(I) \subset$Ens(U, k) zuordnet. Die Elemente von U heißen *reguläre Funktionen auf* U
Fordere: Ist $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ System offener Teilmengen mit $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, und $f : V \to k$ so $f \in \mathcal{O}(V) \Leftrightarrow f \mid_U \in \mathcal{O}(U)$

Definition 2.27 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y$ k-geringte Räume. Ein *Morphismus* ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ so dass gilt: $V \subset Y, f \in \mathcal{O}_Y(V) \Rightarrow (f \circ \varphi) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$

Beispiel 2.14 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist Morphismus gdw φ stetig differenzierbar

Bemerkung Kann zu System von Strukturen als k-geringter Raum auf fester Menge X den Schnitt nehmen:
Offen: Für jede der Strukturen offen
Regulär: für jede der Strukturen regulär

Eine Struktur $(X, \mathcal{O})$ auf X als k-geringter Raum größergleich $(X, \mathcal{O}')$ gdw $(X, \mathcal{O}) \overset{id}{\to} (X, \mathcal{O}')$ ist Morphismus

Definition 2.28 X Menge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ k-geringt, $\varphi_i : Y_i \to X$
Die *finale Struktur* auf X ist die größte Struktur, für die alle φ_i Morphismen sind

Definition 2.29 Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \overset{\varphi}{\to} (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt final gdw $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist die finale Struktur zu φ

Bemerkung (Universelle Eigenschaft der finalen Struktur) $(Y_i, \mathcal{O}_i), \varphi_i : Y_i \to X$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$
So ist $\psi : X \to Z$ Morphismus für finale Struktur auf X gdw $(\psi \circ \varphi_i) : Y_i \to Z$ Morphismen $\forall i$

Definition 2.30 X Menge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ k-geringt, $\psi_i : X \to Y_i$. Die *initiale Struktur* auf X ist die kleinste Struktur als k-geringter Raum, für die alle ψ_i Morphismen werden
Morphismus $X \to Y$ initial gdw X hat initiale Struktur

Universelle Eigenschaft φ Morphismus für initiale Struktur gdw $\psi_i \circ \varphi$ Morphismen $\forall i$

Beispiel 2.15 $Y \hookrightarrow X$ Einbettung von Teilmenge, $(X, \mathcal{O})$. Initiale Struktur auf Y heißt *induzierte Struktur*
Topologie: Induzierte Topologie = Spurtopologie: $V \subset Y$ offen gdw $\exists U \subset X$ offen mit $V = U \cap Y$
$f \in \mathcal{O}(V)$ gdw $\exists U_i \subset X$ offen mit $V = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y)$ und $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit $f_i \mid_{U_i \cap Y} = f \forall i$

$\mathbb{R}^{n+1} \hookleftarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} = \{$ Menge aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^n\}$

Definition 2.31 Ein k-geringter Raum (k Körper) $(X, \mathcal{O})$ heißt *gesättigt* gdw $\forall U \subset X$ offen, $\forall f \in \mathcal{O}(U)$ ist $U_f = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ auch offen und $(\frac{1}{f}) \in \mathcal{O}(U_f)$

Schnitt gesättigter Strukturen ist gesättigt, finale Struktur zu gesättigten Strukturen ist gesättigt

Beispiel 2.16 $(\mathbb{R}^n, C^1)$ ist gesättigt

Proposition Gegeben gesättigte geringte Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$, erhalte Produkt in der Kategorie der gesättigten geringten Räume, wie folgt:
Nimm kleinste gesättigte Struktur, die die initiale Struktur zu den Projektionen umfasst

Definition 2.32 $(k = \overline{k})$, $X \subset k^n$ abgeschlossen, versehe mit induzierter Struktur
$\rightsquigarrow$ k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *affine k-Varietät*

Definition 2.33 Eine k-Prävarietät ist k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ der eine endliche offene Überdeckung hat durch affine k-Varietät

Definition 2.34 Eine *k-Varietät* ist eine k-Prävarietät X mit der Eigenschaft, dass $\Delta : X \to X \times X$ abgeschlossenes Bild hat, also: $\Delta(x) \subset X \times X$ abgeschlossen.

Satz 2.27

1. Die Kategorie der Prävarietäten hat endliche Produkte und diese stimmen überein mit den Produkten von gesättigten k-geringten Räumen
2. Analog mit Varietäten
3. Das Produkt affiner Varietäten ist affin

Satz 2.28 $k = \overline{k}$ Sei $X \subset k^n$ abgeschlossen, so $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X$

Satz 2.29 $k = \overline{k}$ Habe Äquivalenzen von Kategorien

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen irgendwelcher } k^n, \text{ polyn. Abb.}\} \to \{\text{affine } k\text{-Kringalgebren}\}$$
$$\to \{\text{affine } k\text{-Varietäten}\}$$

V ein k-Vektorraum $\rightsquigarrow \mathbb{P}V = (V \setminus \{0\})/k^\times =$"Die Menge aller Ursprungsgeraden in V", *projektiver Raum zu* V,
$\pi : V \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}V, v \mapsto \langle v \rangle =$"Ursprungsgerade durch V"
$\mathbb{P}(k^{n+1}) =: \mathbb{P}^n k$

Satz 2.30 ($k = \overline{k}$,$\dim_k V < \infty$) Mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums ist $\mathbb{P}V$ eine k-Varietät

Definition 2.35 Eine *projektive Varietät* ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$

Bemerkung Jede abgeschlossene Teilmenge einer (Prä)varietät ist mit der induzierten Struktur wieder eine (Prä)varietät

Satz 2.31 Sei X irreduzible projektive Varietät, $Y, Z \subset X$ irreduzible, abgeschlossene Teilmengen. Dann gilt: $\dim Z + \dim Y \geq \dim X \Rightarrow Z \cap Y \neq \emptyset$

Definition 2.36

$\{$Teilmengen von $\mathbb{P}^n k\} \xrightarrow{\sim} \{k^\times$-stabile Teilmengen von k^{n+1}, die den Ursprung enthalten$\}$

$W \mapsto \pi^{-1}(W) \cup \{0\} =: C(W)$ *Kegel* über W

Bemerkung $\pi^{-1}(W) \subset k^{n+1} \backslash \{0\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow W \subset \mathbb{P}^n k$ abgeschlossen $\Leftrightarrow C(W) \subset k^n$ abgeschlossen

Bemerkung $W \subset \mathbb{P}^n k$ abgeschlossen, irreduzibel $\Leftrightarrow C(W)$ irreduzibel und $\neq \{0\}$

Satz 2.32 Auf einer irreduziblen projektiven Varietät X sind die einzigen globalen regulären Funktionen die Konstanten
$\mathcal{O}_X(X) = k$

Lemma 2.15 $C \subset k^{n+1}$ stabil unter $k^\times$, so ist $\mathcal{I}(C)$ homogenes Ideal in $k[T_0, ..., T_n]$

Lemma 2.16 $V = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ graduierter k-Vektorraum, $|k| = \infty$
Für $\lambda \in k^\times$ erkläre $\lambda^* : V \to V, v \mapsto \lambda^i v \forall v \in V_i, \forall i$
$U \subset V$ ist homogen gdw U stabil unter $\lambda^* \forall \lambda \in k^\times$

Satz 2.33 (Bezout) Seien $C \neq D \subset \mathbb{P}^2 k$ abgeschlossene, irreduzible Kurven der Grade c, d

$$\sum_{x \in C \cap D} i_x(C, D) = cd$$

i_x Multiplizität des Schnittes

Definition 2.37 X Prävarietät, $x \in X$. $\mathcal{O}_{X,x} = \{(U, f) \mid x \in U \subset X \text{ offen}, f \in \mathcal{O}(U)\} / \sim$ heißt Lokaler Ring
$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V : x \in W \wedge f\mid_W = g\mid_W$

Bemerkung $\mathrm{hdim} M = d$, $f : M \hookrightarrow M$ mit $f(M_i) \subset M_{i+c} \forall i$, $\mathrm{hdim}(\mathrm{cok} f) = (\mathrm{hdim} M) - 1$
$\mathrm{mult}(\mathrm{cok} f) = c\,\mathrm{mult} M$

Satz 2.34 Jede offene Teilmenge einer (Prä-)Varietät ist mit der induzierten Struktur wieder eine (Prä-)Varietät. Das selbe gilt für abgeschlossene Teilmengen

Satz 2.35 Sei X affine Varietät, $f : X \twoheadrightarrow Y$ surjektiv, endliche Fasern, fast alle Fasern haben nur einen Punkt. So ist Y mit finaler Struktur auch eine affine k-Varietät

Lemma 2.17 M $\mathbb{Z}$-graduierter Modul über $k[T_1, ..., T_n]$, so $(T_0 - 1) : M \twoheadrightarrow M$ injektiv

Definition 2.38 Sei X Prävarietät. $\mathcal{M}(X) = \big\{(U, f) \mid U \subset X \text{ offen}, \overline{U} = X,\ f : U \to k \text{ regulär}\big\} / \sim$
$(U, f) \sim (U', f')$ gdw $\exists U'' \subset U \cap U'$ offen mit $\overline{U''} = X$ und $f\mid_{U''} = f'\mid_{U''}$
$\mathcal{M}(X)$ heißt Ring der *rationalen Funktionen*