Grundlagenkram

- Konvergenz bzgl. $||\cdot||_\infty$ = gleichmäßige Konvergenz.
- *Hölder-Ungleichung:* Sei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ oder $p=1, q=\infty$, dann gilt $||xy||_1 \leq ||x||_p\, ||y||_q$.
  Für $f,g \in \mathcal{L}^p:\ ||fg||_1 \leq ||f||_p\, ||g||_q$
- *Minkowski-Ungleichung = Dreiecksungleichung für $||\cdot||_p$:* Für $x,y \in \ell^p$ gilt $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$.
  Für $f,g \in \mathcal{L}^p:\ ||f+g||_1 \leq ||f||_p + ||g||_p$.
- *Youngsche Ungleichung:* p,q wie oben, $a,b \in \mathbb{C}$, dann gilt $|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$
- Isometrien sind injektiv und gleichmäßig stetig.
- *Cauchy-Schwarz:* $\langle a,b\rangle^2 \leq \langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle$. Gleichheit gilt gdw $\langle u,v\rangle = 0$.

Vollständigkeit

- *Banachscher Fixpunktsatz:* In einem Banachraum hat jede Kontraktion einen Fixpunkt.
- *Schachtelungssatz:* In einem Banachraum konvergiert jede Folge abgeschlossener Kugeln $K_n = K_{r_n}(u_n)$ mit $K_{n+1} \subset K_n$ und $r_n \to 0$ gegen genau einen Punkt.
- *Satz von Baire (Banachraum):* Sei U_n abgeschlossen. Wenn $\mathsf{int}\left(\bigcup_{n=0}^\infty U_n\right) \neq \emptyset$, dann gibt es ein U_n mit $\mathsf{int}(U_n) \neq \emptyset$.
  Äq. Der abzählbare Schnitt offener, dichter Mengen ist dicht (nicht leer).
  Beweis: Sei $V \subset \bigcup_{n=0}^\infty U_n$ offen. Konstruiere Schachtelung (K_n) mit $K_n \subset V$, $K_{n+1} \subset K_n \subset X \setminus U_n, 0 < r_n \leq \frac{1}{n}$. Dann gilt $K_n \to u \in X \setminus \bigcup U_n$ und $u \in V$, widerspruch.
- *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit:* Ist $V \subset C(X)$ punktweise beschränkt, dann gibt es eine offene Kugel $B \subset X$ und $C > 0$ so, dass $|f(x)| < C$ für alle $f \in V, x \in B$.
  Beweis: Definiere $U_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n \forall f \in V\}$, dann gilt $\bigcup U_n = X$, die Behauptung folgt mit Satz von Baire.

Kompaktheit

- Kompakt $\Leftrightarrow$ Folgenkompakt (jede Folge hat konvergente Teilfolge) $\Rightarrow$ abgeschlossen, total beschränkt (durch endlich viele ε-Kugeln überdeckt), vollständig.
- Relativ kompakt = Abschluss kompakt. $U \subset X$ ist relativ kompakt, wenn jede Folge eine (in X) konvergente Teilfolge besitzt.
- X kompakt, $f: X \to Y$ stetig $\Rightarrow f$ gleichm. stetig.
- X kompakt $\Rightarrow C(X)$ ist Banachraum bzgl. supnorm.
- *Arzelà-Axcoli:* X kompakt $\Rightarrow M \subset C(X)$ ist relativ kompakt gdw:
  1. M ist gleichmäßig beschränkt: $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in X, f \in M$.
  2. M ist gleichgradig stetig; d.H. $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x,y \in X \forall f \in M\ d(x,y) < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

  Beweis: M relativ kompakt $\Rightarrow$ total beschränkt, also gibt es endliche $\frac{\varepsilon}{3}$-Überdeckung um Funktionen $f_1, .., f_n$. Die f_i sind gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ gleichgradige Stetigkeit.
  Umkehrung hässlich.

Banachräume

- In einerm normierten Raum sind Addition, skalare Multiplikation und die Norm selbst immer stetig.
- Äquivalente Normen liefern die selbe Topologie/Konvergenz.
- Im endlich-dim. sind alle Normen äquivalent.
- *Lemma von Riesz:* $U \subset X$ nichtleerer, abgeschlossener Unterraum und $0 < \beta < 1$, dann gibt es $w \in X$ mit $||u - w|| \geq \beta$ für alle $u \in U$.
- Endlichdimensional $\Leftrightarrow$ Einheitskugel relativ kompakt.
  Beweis: Hinrichtung: Äquivalenz von Normen, trivial. Rückrichtung: Wähle u_0 mit $||u_0|| = 1$ beliebig und induktiv mit Riesz u_i so, dass $||u_i|| = 1$ und $||u - u_i|| = \frac{1}{2}$ für alle $u \in \langle u_0, u_1, ..., u_{i-1}\rangle$. Die Folge kann dann keine konvergente Teilfolge haben.

Räume stetig differenzierbarer Funktionen

- *Hölder-Raum:* $m \in \mathbb{N}, 0 < \lambda \leq 1$:
$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C^m(\overline{\Omega}) \mid ||f||_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} < \infty \right\}$$
mit
$$||f||_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}$$
$C^{0,1}$: gleichmäßig stetig; $C^{m,1}$: Ableitung der Ordnung m ist Lipschitzstetig.
Beispiel: $C^{0,\lambda}([-1,1]) \ni f(x) = |x|^\lambda$.
- Hölder-Räume sind Banachräume.
- Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-Gebiet*, wenn der Rand durch endlich viele offene Mengen B_i überdeckbar ist, $\partial\Omega \cap B_i$ (potentiell nach Drehung) Graph einer Lipschitzstetigen Funktion ist und $\Omega \cap B_i$ auf jeweils nur einer Seite des Randes liegt („geschlitzte“ Gebiete).
- Lipschitz-Gebiet $\Rightarrow$ Randbedingungen für partielle Differenzialgleichungen (Poisson-Problem: $-\Delta u = f, u\restriction_{\partial\Omega} = g$)

Hilbert-Räume

- Eine Norm induziert ein Skalarprodukt gdw die Parallelogrammgleichung $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\,||u||^2 + 2\,||v||^2$ gilt. Dann ist $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2)$.
- Skalarprodukte sind stetig.
- Sei $U \subset X$ ein nicht-leerer abgeschl. Unterraum. Die *Bestapproximation* $w_u \in U$ für $u \in X$ ist das Element mit $||u - w_u|| = \inf_{w\in U} ||u - w||$. Äquivalent: Wenn $\langle w_u - u, v\rangle = 0$ für alle $v \in U$.
- Wenn U ein vollständiger Unterraum ist, existiert zu jedem $u \in X$ eine Bestapproximation.
- Wenn U endlichdim. mit Basis $(v_1, ..., v_n)$ dann ergeben sich die Parameter der Bestapproximation an u aus dem LGS $\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle v_i, v_k\rangle = \langle v_i, u\rangle$

Lebesgue- und Sobolevräume

- *Riesz-Fischer:* $L^p(\Omega)$ ist vollständig.
- $C_0^0(\Omega)$ (stetig+kompakter Träger) ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$. (Beweis: Treppenfunktionen sind dicht, charakteristische Funktionen sind stetig approximierbar).
Falsch für $p = \infty$, weil Konstanten Funktionen nicht mit der L^∞-Norm approximierbar sind.
- Sobolevräume sind bääh.

Lineare Operatoren und Hahn-Banach-Sätze

Beschränkte lineare Operatoren

- Operatornorm: $||A|| = \sup_{||u||=1} ||Au||$. A ist beschränkt gdw stetig.
Beweis: Unbeschränkt $\Rightarrow$ Es gibt Folge mit $||Au_n|| > n\,||u_n||$, also geht $\frac{u_n}{||Au_n||} \to 0$, aber $\left|\left| A \frac{u_n}{||Au_n||} \right|\right| = 1$, also nicht stetig. Umgekehrt folgt aus Beschränktheit (Folgen)stetigkeit in der 0.
- Y vollständig $\Rightarrow L(X, Y)$ ist Banachraum.
- Lineare Abbildungen auf dichten Teilräumen lassen sich eindeutig auf den ganzen Raum fortsetzen.
- *Prinzip der Normbeschränktheit:* Sei X vollständig und $U \subset L(X, Y)$ punktweise beschränkt ($\forall x \exists c \forall A \in U \;\; ||Ax|| \leq c$).
Dann ist U beschränkt ($\exists C \forall A \in U \;\; ||A|| \leq C$).
Beweis: Folgt aus dem Prinzip der gleichm. Beschränktheit für $f_A : x \to ||Ax||$.
- X vollständig und $A_n \in L(X, Y)$ punktweise konvergent $\Rightarrow$ für $Ax := \lim A_n x$ gilt $A \in L(X, Y)$.
- *Banach-Steinhaus* XX vollständig; $(A_n) \subset L(X, Y)$ konvergiert punktweise gegen $A \in L$ gdw (a) es eine dichte Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $\forall u \in U \; A_n u \to Au$ und (b) $\exists C \forall n \;\; ||A_n|| \leq C$
Beweis: Folgt aus den vorherigen zwei.
- Projektion: Für $P \in L(X, U), U \subset X$ Unterraum gilt $\forall u \in U \; Pu = u$ gdw $P^2 = P$.
Die Bestapproximation ist eine Projektion.

Invertierbarkeit

- f bijektiv ist offen gdw f^{-1} stetig.
- *Satz von der offenen Abbildung:* $A \in L(X,Y)$ ist offen gdw surjektiv.
  Beweis darüber, dass A offen ist gdw es ein δ gibt mit $B_\delta(0) \subset A(B_1(0))$.
- $\Rightarrow$*Satz von der inversen Abbildung:* Ist $A \in L(X,Y)$ bijektiv, dann ist $A^{-1} \in L(Y,X)$.
- Ist $A \in L(X,X)$ mit $||A|| < 1$, dann ist $(Id - A)$ invertierbar mit $(Id - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ und Norm $\frac{1}{1-||A||}$.
- *Anwendung:* Jedes Gleichungssystem $u - Au = f$ ist mit dem Banachschen Fixpunktsatz lösbar.

Lineare stetige Funktionale

- *Hahn-Banach:* Sei $U \subset X$ ein Unterraum und $f \in U'$. Dann gibt es eine Fortsetzung $g \in X'$ mit $||g|| = ||f||$.
  Beweis: Wähle $u_0 \in X \setminus U$ und finde $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $f_0(u + \delta u_0) := f(u) + \delta\alpha$ die Norm $||f_0|| = ||f||$ hat. Erhalten $f_0 \in (\langle U, u_0 \rangle)'$. Wende nun Zorns Lemma auf die Partielle Ordnung der linearen Fortsetzungen von f auf Oberräume von U an.
- $\Rightarrow$*Trennungssatz:* Sei $U \subset X$ und $x \in X \setminus U$ mit $\inf_{u \in U} ||u - x|| = d > 0$. Dann gibt es ein $f \in X'$ mit $f\restriction_U = 0, f(x) = d$ und $||f|| = 1$.
  Beweis: Wende Hahn-Banach auf $g \in (\langle U, x \rangle)', g(u + \delta x) := \delta d$ an.
- $\Rightarrow$ Für jedes $u \neq 0$ gibt es $f \in X'$ mit $f(u) = ||u||$ und $||f|| = 1$.
- $\Rightarrow u = 0 \leftrightarrow \forall f \in X' \; f(u) = 0$.
- $\Rightarrow \forall u \in X \;\; ||u|| = \sup_{||f||=1} |f(u)|$.
- Dualraum ist ein Banachraum

Darstellungssatz von Riesz und Lemma von Lax-Milgram

- *Rieszscher Darstellungssatz:* Sei X Hilbertraum. Für jedes $f \in X'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes *darstellendes Element* $v_f \in X$ so, dass $f(u) = \langle v_f, u \rangle$. Der *Rieszsche Darstellungsoperator* $f \mapsto v_f$ ist linear, bijektiv und isometrisch.
  Beweis: Betrachte $N = \{u \in X \mid f(u) = 0\}$ und wähle $w \notin N$. Sei $\tilde{w}$ die Bestapproximation und setze $v_f := \frac{f(w-\tilde{w})(w-\tilde{w})}{||w-\tilde{w}||^2}$. Mit $w - \tilde{w} \perp N$ folgt der Satz.
- *Lemma von Lax-Milgram* Sei X ein Hilbertraum und $a : X^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige, elliptische Bilinearform, d.H. $\exists \alpha > 0 : a(v,v) > \alpha ||v||^2$ für alle $v \in X$. Dann gibt es für jedes $f \in X'$ ein eindeutiges v_f so, dass $f(u) = a(v_f, u)$.
  Beweis: mit dem Rieszschen Darstellungssatz für jedes $a(u, \cdot)$ und dem Banachschen Fixpunktsatz.
- $\Rightarrow$ Es gibt eindeutige schwache Lösung für Poisson-Probleme

Schwache Konvergenz und Kompakte Operatoren

Reflexive Räume

- Die Einsetzungsabbildung $E : X \to X''$ ist ein isometrischer Isomorphismus auf den Teilraum $E(X) \subset X''$. X heißt reflexiv, wenn E surjektiv ist.
- Hilbert-Räume sind reflexiv. Beweis mir Rieszschem Darstellungssatz.
- Abgeschlossene Teilräume von reflexiven Räumen sind wieder reflexiv.
- Ein Banachraum ist reflexiv genau dann, wenn der Dualraum reflexiv ist.

Schwache Konvergenz

- (u_n) heißt schwach kompakt, wenn es ein u gibt so, dass für alle $f \in X'$ gilt $f(u_n) \to f(u)$.
  $(f_n) \in X'$ heißt schwach*-konvergent, wenn es ein $f \in X'$ gibt so, dass für alle $u \in X$ gilt $f_n(u) \to f(u)$.
- Grenzwerte schwach(*) konvergenter Folgen sind eindeutig und die Folgen sind beschränkt. Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz.
- *Beispiel:* Ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Prä-Hilbertraum ist schwach konvergent gegen 0, aber nicht Normkonvergent. (Beweis: Parzevalsche Identität und Rieszscher Darstellungssatz)
- Prähilbert-Raum: Wenn (x_n) schwach gegen x konvergiert und $||x_n|| \to ||x||$, dann konvergiert (x_n) stark.
- Fischer-Riesz $\Rightarrow$ In einem Hilbertraum gilt $x_n \to x$ gdw $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ für alle $y \in X$.

Beschränkte Folgen in reflexiven Räumen

- *Banach-Alaoglu:* Ist X separabel, dann enthält jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.
  Beweis: Diagonalargument: Wähle dichte Folge u_n und sei f_n beschränkt. Dann ist für jedes i die Folge $f_n(u_i)$ beschränkt in $\mathbb{R}$, hat also eine konvergente Teilfolge. Sei $(f_{1,n}(u_1))$ eine konvergente Teilfolge von $(f_n)(u_1)$ und $(f_{i+1,n}(u_{i+1}))$ eine konvergente Teilfolge von $(f_{i,n}(u_{i+1}))$. Dann ist $(f_{k,k})$ konvergent für alle u_i. Der Rest folgt aus der Dichtheit von (u_n).
  $\Rightarrow K_1(0) \subset X'$ ist schwach*-Folgenkompakt.

- ist X' separabel, dann auch X.

- *Eberlein-Smuljan:* Ist X reflexiv, dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge, i.e. $K_1(0)$ ist schwach-Folgenkompakt.

Kompakte Operatoren

- Ein linearer Operator heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.
  $A : X \to Y$ ist kompakt genau dann, wenn für alle beschränkten Folgen $(u_n) \subset X$ die Bildfolge (Au_n) eine stark konvergente Teilfolge besitzt.
  Kompakte Operatoren sind beschränkt.
  Linearkombinationen kompakter Operatoren sind kompakt
  Wenn $A, B \in L(X, Y)$, dann ist $A \cdot B$ kompakt, wenn A oder B kompakt ist.
  Die Identität auf X ist kompakt gdw X endlich-dimensional ist.
  Wenn $A(X)$ endlich-dimensional ist, ist A kompakt.

- Sei Y vollständig. Der Grenzwert einer Folge kompakter Operatoren in $L(X, Y)$ ist wieder kompakt.

- Ein kompakter Operator bildet schwach konvergente Teilfolgen auf stark konvergente Folgen ab.

- *Beispiele:* Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ist der Operator $Au(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)dy$ kompakt.
  Für $s > 0$ ist die Einbettung $C^s(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ kompakt. (Beides mit Arzela-Ascoli).

- n

Beispiele

- $\ell^\infty(T) = \left\{f : T \to \mathbb{K} \mid \sup_{t\in T} |f(t)| < \infty\right\}$ ist ein nicht-separabler Banachraum (für $|T| \geq \omega$)
  $\Rightarrow C^b(T)$ (stetig+beschränkt) ist Banachraum (weil abgeschlossener UV)

- $\ell^p(\mathbb{K}) = \left\{(t_n) \in \mathbb{K}^\omega \mid ||(t_n)||_p < \infty\right\}$ mit $||(t_n)||_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |t_n|^p}$ ist ein Banachraum.

- $\mathcal{L}^p(I) = \left\{f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \ ||f||_p < \infty\right\}$ Modulo Nullmengen mit $||f||_p = \sqrt[p]{\int_I |f|^p \, d\lambda}$ ist ein Banachraum.

- $C^r(\overline{\Omega}) = \left\{f \in C(\overline{\Omega}) \mid f \text{ ist } r\text{-mal stetig diffbar}\right\}$ ist ein Banachraum bzgl. $||f|| = \sum_{i=0}^r \left|\left|f^{(i)}\right|\right|_\infty$, aber nicht bzgl. $||\cdot||_\infty$.

- Abgeschl. Einheitskugel im ∞-dim. Raum nicht kompakt: Definiere Folge von Folgen c^k über $c_j^k := \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$,
  dann ist $\left|\left|c^k\right|\right|_\infty = 1$ für alle k, aber $\left|\left|c^i - c^j\right|\right|_\infty = 1$, ergo keine konvergente Teilfolge.