Inhaltsverzeichnis

Forcing

Ich empfehle (und verweise massivst) auf das exzellente Skript von Frau Mildenberger[1] und das Buch *Set Theory - An Introduction to Independence Proofs* von Kenneth Kunen.

1 Unabhängigkeitsbeweise

Forcing ist eine Technik, mit der man die Unabhängigkeit von Aussagen in ZFC beweisen kann; also dass ZFC eine Aussage nicht entscheidet. Genauer gesagt ermöglicht Forcing zu beweisen, dass eine bestimmte Aussage *relativ konsistent* zu ZFC ist. Das bedeutet: Sei ϕ irgendeine Formel. Dann ist ϕ relativ konsistent zu ZFC, wenn gilt:

> Wenn ZFC konsistent ist, dann ist auch $\mathsf{ZFC} \cup \{\phi\}$ konsistent.

Was üblicherweise formal ausgedrückt wird als

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}+\phi)$$

Ein klassisches Beispiel ist die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese* GCH:

> **GCH:** Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt $\kappa^+ = 2^\kappa$, wobei κ^+ der direkte (Kardinalzahl-)Nachfolger von κ ist (oder anders ausgedrückt: Für jede Ordinalzahl α gilt $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$)

Eine Folgerung daraus ist die einfache Kontinuumshypothese CH: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, an der Cantor und Gödel sich die Zähne ausgebissen haben.

Gödel hatte 1938 bereits die relative Konsistenz von GCH bewiesen, indem er zeigte, dass diese im Universum der konstruktiblen Mengen L gilt, also:

$$\mathsf{ZFC}+\mathsf{V}=\mathsf{L} \vdash \mathsf{GCH}$$

Nachdem V=L relativ konsistent zu ZFC ist, bedeutet das, dass auch GCH relativ konsistent zu ZFC ist, kurz:

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}+\mathsf{GCH})$$

Um zu zeigen, dass auch die Negation der Kontinuumshypothese relativ konsistent zu ZFC ist entwickelte Paul Cohen in den 60ern das Forcing. Dies erlaubte ihm entsprechend zu zeigen, dass auch gilt

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}+\neg\mathsf{GCH})$$

womit gezeigt war, dass GCH echt *unabhängig* von ZFC ist - ich kann die Kontinuumshypothese sowohl annehmen als auch ablehnen und beides erzeugt in ZFC keinen Widerspruch.

2 Metamathematik des Forcing

Die Grundidee des Forcing ist die folgende: Man schnappt sich ein abzählbares transitives Modell von ZFC (das es wegen dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz gar nicht beweisbar geben kann, aber tun wir mal kurz so, als ob). In diesem Modell M suchen wir uns dann eine partielle Ordnung und einen Filter G auf der partiellen Ordnung (der üblicherweise gar nicht selbst in M liegt) und nutzen diese, um ein neues Modell N zu konstruieren, das G enthält und eine Obermenge von M ist. Die Formeln, die in diesem neuen Modell N gelten, werden dann durch die partielle Ordnung bestimmt, das heißt wenn wir die relative Konsistenz von einer Aussage ϕ zeigen wollen, müssen wir nur dafür sorgen, dass die partielle Ordnung so gebaut ist, dass das entstehende Modell N sowohl ZFC als auch ϕ erfüllt. Wenn wir das geschafft haben, können wir also folgern, dass ZFC+ϕ relativ konsistent zu ZFC sein muss.

[1] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mildenberger/veranstaltungen/ss13/ax_19_7_2013.pdf

Das Problem hierbei ist natürlich zuallererst, dass wir nicht einfach annehmen können, dass es überhaupt ein Modell von ZFC gibt (2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz). Das macht aber aus folgendem Grund nichts:

Wenn ZFC+ϕ *widersprüchlich* wäre, dann gäbe es nach dem Kompaktheitssatz ja eine endliche Teilmenge $T \subset$ ZFC so, dass $T \cup \{\phi\}$ widersprüchlich wäre. Wir können aber für jede solche Teilmenge zeigen, dass sie konsistent ist[2]; es reicht also zu zeigen, dass für jede endliche Teilmenge $T \subset$ ZFC gilt, dass $T \cup \{\phi\}$ konsistent ist.

Das „abzählbare, transitive Modell M" ist also eigentlich gar kein Modell von ZFC, sondern nur von einer (endlichen) Teilmenge T; davon finden wir nämlich immer ein Modell, der Satz von Löwenheim-Skolem liefert uns dann ein abzählbares und ein weiterer Satz (*Mostowski-Kollaps* genannt) liefert uns dann eines, das zusätzlich noch transitiv ist. Entsprechend muss auch das mit Forcing konstruierte Modell N nicht ganz ZFC erfüllen - es muss nur zu jeder endlichen Teilmenge T' (die nicht zwangsläufig $= T$ sein muss) eine solche Forcingerweiterung geben, die T' und ϕ erfüllt.

Diese ganze metamathematische Vorüberlegung erlaubt es uns aber (zumindest für alle Forcingzwecke) einfach so zu tun, als hätten wir ein Modell von ZFC, deswegen beginnen üblicherweise alle Forcingbeweise mit dem Satz „Sei M ein abzählbares transitives Modell[3] von ZFC", auch wenn das eigentlich grober Unfug ist.

3 Partielle (und Quasi-)Ordnungen und Filter

Sei im folgenden M grundsätzlich ein abzählbares, transitives Modell von ZFC.

Definition 3.1. Sei $(P, \leq)$ eine Struktur mit zweistelliger Relation $\leq$.

- $(P, \leq)$ heißt *Quasiordnung*, wenn $\leq$ transitiv und reflexiv ist.
- Eine Quasiordnung heißt *partielle Ordnung*, wenn sie zusätzlich antisymmetrisch ist.
- $p, q \in P$ heißen *unvergleichbar*, wenn weder $p \leq q$ noch $q \leq p$ gilt.
- p, q heißen *inkompatibel*, (formal: $p \perp q$), wenn es kein $r \in P$ gibt, mit $r \leq p$ und $r \leq q$. Gibt es so ein r, heißen p und q *kompatibel* (formal: $p \parallel q$).

Ist P eine Quasiordnung, dann ist $P/\equiv$ unter der Äquivalenzrelation

$$p \equiv q \Leftrightarrow p \leq q \wedge q \leq p$$

eine partielle Ordnung; Für Forcingzwecke reichen Quasiordnungen, aber P und $P/\equiv$ liefern das selbe Forcingmodell, insofern ist der Unterschied eigentlich egal.

Außerdem interessieren uns eigentlich nur partielle Ordnungen, die ein größtes Element 1_P beinhalten (also $p \leq 1_P$ für alle $p \in P$).

Die partiellen Ordnungen, die beim Forcing vorkommen, können nahezu alle sein; zum Beispiel die Menge der nicht-leeren offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\subseteq$ als Ordnung, oder $Fn(I, J, \lambda)$ (siehe Seite 10) Als nächstes brauchen wir:

[2]Subtil, aber wichtig: Für jede feste Teilmenge T können wir in ZFC beweisen, dass T konsistent ist. Wir können aber *nicht* in ZFC beweisen, dass *jede Teilmenge* von ZFC konsistent ist; sonst könnten wir innerhalb von ZFC mit dem Kompaktheitssatz folgern, dass ZFC konsistent ist, was dem 2. Unvollständigkeitssatz widerspricht. Formal:
Für jede endliche Teilmenge $T \subset$ ZFC gilt ZFC $\vdash$Con(T). Aber nicht:
ZFC $\vdash \forall T \subset$ ZFC Con(T).

[3]Kurz: CTM für *countable transitive model*

Definition 3.2. • Eine Teilmenge $D \subseteq P$ heißt *dicht (unter $p \in P$)* wenn für jedes q $(\leq p)$ ein $d \in D$ existiert mit $d \leq q$.

- Eine Teilmenge $G \subseteq P$ heißt *Filter*, wenn $G \neq \emptyset$ gilt und
  - $\forall p \in P \, \forall q \in G \, (q \leq p \rightarrow p \in G)$ (G ist nach oben abgeschlossen)
  - $\forall p, q \in G \, \exists r \in G \, (r \leq p, q)$ (Alle Elemente in G sind kompatibel)
- Ein Filter heißt *P-generisch über M*, wenn er jede dichte Teilmenge von P, die in M liegt, schneidet.

So einen Filter finden wir auch tatsächlich immer:

Satz 3.1. ***(Rasiowa-Sikorski)*** *Für jedes $p \in P$ gibt es einen P-generischen Filter G über M so, dass $p \in G$.*

(Beweis etwas technisch, aber nicht schwer - siehe Mildenberger-Skript Seite 62)
Insbesondere interessant sind die folgenden Ordnungen

Definition 3.3. Eine partielle Ordnung P, für die gilt $\forall p \in P \, \exists q, r \in P \, (q, r \leq p \wedge q \perp r)$ heißt *Splitting.*

Satz 3.2. *Wenn $P \in M$ ein Splitting ist und G ein P-generischer Filter über M, dann $G \notin M$.*

Beweis. (Siehe Skript Seite 63) Wenn $G \in M$ gilt, dann muss auch $D := P \setminus G \in M$ gelten (weil M ein transitives Modell von ZFC ist und somit das Aussonderungsaxiom gilt). Wenn wir jetzt zeigen, dass D dicht ist sind wir fertig, weil $G \cap D = \emptyset$ dann der Generizität von G widerspräche. Also:
Sei $p \in P$ beliebig, dann gibt es also (nach Splitting-Definition) inkompatible $q, r \leq p$. Es können nicht q und r beide in G liegen, weil per Definition alle Elemente eines Filters kompatibel sind; eines der beiden muss also in D liegen; also gibt es $q \in D$ mit $q \leq p$. □

Beim Forcing interessieren uns eigentlich hauptsächlich Splittings; das Forcing-Modell N wird dann das kleinste Modell sein, für das $G \in N$ und $M \subset N$ gilt. Fun fact: Wenn $P \in M$ splitting und M beide abzählbar unendlich sind (was in der Praxis immer der Fall ist), gibt es genau $2^{\aleph_0}$ viele P-generische Filter über M (Beweis darüber, dass ich in einem unendlichen Splitting einen binären Baum einbetten kann; jeder Pfad liefert dann einen anderen generischen Filter und in einem abzählbaren binären Baum gibt es $2^{\aleph_0}$ viele Pfade)

Zu Absolutheit: Insbesondere im letzten Beweis ist wichtig, dass bestimmte Formeln (und damit bestimmte Mengen oder Operationen) *absolut für transitive Modelle sind* - Das bedeutet im Prinzip, dass unser „Metamodell“ (nennen wir es wie allgemein üblich $\mathbf{V}$) und das ctm M sich darüber einig sind, was die Formel sagt. Beispielsweise ist $D \in M$ dicht in P genau dann, wenn M ebenfalls „sagt“, dass D dicht ist und $P \setminus G$ ist die selbe Menge wie $(P \setminus G)^M$ (also die Menge, die M „für $P \setminus G$ hält“). Abzählbarkeit hingegen ist definitiv *nicht* absolut - auch in M gibt es ja z.B. eine „Menge reeller Zahlen“ $\mathbb{R}^M$, die aber natürlich abzählbar ist, weil M es auch ist, also $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^M$. Den klassischen Beweis, dass es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt kann ich aber natürlich in M auch führen - M denkt also, $\mathbb{R}^M$ wäre überabzählbar. Genaueres dazu findet sich im Mildenberger-Skript ab Seite 40 (Lévy-Hierarchie) oder im Ziegler-Skript zur Mengenlehre[4] auf Seite 51 (Transitive Modelle der Mengenlehre).

[4] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/mengenle.pdf`

4 Namen, Auswertungen und $M[G]$

Wir wollen jetzt das Forcingmodell N konstruieren. Dazu benutzen wir ein Splitting $P \in M$ und einen P-generischen Filter G über M, um eine ganze Klasse (also tatsächlich im Sinne von: keine Menge) von *Namen* für die Elemente in N zu konstruieren. Diejenigen Namen, die in M liegen, erlauben es uns dann, innerhalb von M über die Elemente in N zu reden (daher der *Name* - Pun intended) und indem wir die Namen in M auf eine bestimmte Art und Weise auswerten erhalten wir ein neues transitives Modell $M[G]$, das unser gewünschtes N sein wird. Die nächste Definition wird etwas abstrakt, daher gebe ich mehrere äquivalente Beschreibungen:

Definition 4.1. 1. Rekursiv: Eine Menge $\tau \subset \mathbf{V} \times P$ heißt *P-Name*, wenn $\tau = \emptyset$ oder:

$$\forall (\sigma, p) \in \tau : \ \sigma \text{ ist ein } P\text{-Name}$$

2. τ ist ein P-Name, wenn τ eine Relation ist und

$$\forall x \in \tau \; \exists \sigma \in \bigcup\bigcup \tau \; \exists p \in (P \cap \bigcup\bigcup \tau)(x \doteq (\sigma, p) \wedge \sigma \text{ ist ein } P\text{-Name})$$

   Diese Definition ist formal sehr schön, weil aus ihr ersichtlich ist, dass sie absolut für transitive Modelle und Klassen ist. Offensichtlich ist sie äquivalent zur oberen, allerdings ist sie ebenfalls rekursiv, das heißt eigentlich muss man folgendes tun, damit klar ist, dass das wohldefiniert ist:

3. Schrittweise Rekursiv/Induktiv: Definiere die Relation R auf $\mathbf{V}$ über

$$\sigma R \tau :\Leftrightarrow \tau \subset \mathbf{V} \times P \wedge \exists p \in P \; ((\sigma, p) \in \tau)$$

   und per Induktion über R eine charakteristische Operation $H : \mathbf{V} \to 2$ über:

$$H(\emptyset) = 1 \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & \forall y \, (yRx \to H(y) \doteq 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   nach dem *Rekursionssatz für fundierte mengenähnliche Relationen*[5] ist dies wohldefiniert und es gilt: τ ist ein P-Name genau dann, wenn $H(\tau) = 1$.

Die Klasse aller P-Namen bezeichnen wir mit $\mathbf{V}^P$ und entsprechend $M^P := \mathbf{V}^P \cap M$. Wie erwähnt ist die Definition von Namen absolut für transitive Modelle, das heißt:

$$M^P = \{\tau \in M \mid \tau \text{ ist ein } P\text{-Name}\} = \left\{\tau \in M \mid (\tau \text{ ist ein } P\text{-Name})^M\right\}$$

$$= \{\tau \in M \mid M \models \text{„}\tau \text{ ist ein } P\text{-Name“}\}$$

Gut, damit haben wir also die Namen für die Elemente aus N, also definieren wir als nächstes die Auswertungen dieser Namen:

Definition 4.2. • Sei $\tau \in \mathbf{V}^P$ ein P-Name und G ein P-generischer Filter über M. Die *Auswertung* von τ unter G ist (wieder rekursiv):

$$\mathrm{val}(\tau, G) := \tau_G := \{\sigma_G \mid \exists p \in G \; ((\sigma, p) \in \tau)\}$$

- $N := M[G] := \left\{\tau_G \mid \tau \in M^P\right\}$

Auch diese Definition ist wieder absolut für transitive Modelle; insbesondere ist also die Funktion $\tau \mapsto \tau_G$ absolut. Daraus folgt:

[5] Mildenberger-Skript, Seite 54

Satz 4.1. *Ist N ein transitives Modell mit $M \subseteq N$ und $G \in N$, dann gilt $M[G] \subseteq N$.*

Beweis. Es gilt $\tau_G = (\tau_G)^N$ wegen Absolutheit, und nachdem $\tau \in M \subseteq N$ und $P \in M \subset N$ gilt, folgt $\tau_G \in N$ daraus, dass wir wegen $G \in N$ die Auswertung in N definieren können. □

Sobald wir also gezeigt haben, dass $M[G]$ tatsächlich ein transitives Modell ist (und dass $M \subseteq M[G]$ und $G \in M[G]$ gilt) folgt also, dass $M[G]$ tatsächlich das kleinste transitive Modell mit diesen Eigenschaften ist. Außerdem folgt dann: wenn $G \in M$, dann $M[G] = M$. Dass $M[G]$ transitiv ist, ist auch bereits aus der rekursiven Definition von Namen und Auswertung ersichtlich.

Beispiel 4.1. : $\emptyset$ ist ein Name. Entsprechend gilt $\emptyset_G = \emptyset$. Außerdem ist für jedes $p \in P$ die Menge $\{(\emptyset, p)\}$ ein Name. Es gilt dann

$$\{(\emptyset, p)\}_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G\ ((\sigma, p) = (\emptyset, p))\} = \begin{cases} \emptyset & p \notin G \\ \{\emptyset\} & p \in G \end{cases}$$

Mehr noch: Für jede Teilmenge $Q \subseteq P$ ist die Menge $\{(\emptyset, p) \mid p \in Q\} = \tau^Q$ ein Name, und genauso folgt

$$\tau^Q_G = \begin{cases} \emptyset & Q \cap G = \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei jetzt $p \in G$. Dann ist also wie gerade gezeigt $\{(\emptyset, p)\} =: \tau$ ein Name und $\tau_G = \{\emptyset\}$. Entsprechend ist auch für jedes $q \in P$ die Menge $\{(\tau, q)\}$ ein Name. Es folgt:

$$\{(\tau, q)\}_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G\ ((\sigma, p) = (\tau, q))\} = \begin{cases} \emptyset & q \notin G \\ \{\tau_G\} = \{\{\emptyset\}\} & q \in G \end{cases}$$

und so lässt sich das Spielchen fortsetzen.

Wie aus dem Beispiel ersichtlich wird kann eine Auswertung beliebig viele verschiedene Namen haben (Klassenviele). Als nächstes definieren wir also (schon wieder rekursiv) einen „kanonischen Namen" für Mengen aus M:

Definition 4.3. Für $x \in M$: $\check{x} := \{(\check{y}, 1_P) \mid y \in x\}$

Dieser erfüllt tatsächlich das, was er auch erfüllen sollte, nämlich:

Satz 4.2. $\forall x \in M\ (\check{x} \in M^P \wedge \check{x}_G = x)$

Daraus folgt sofort $M \subseteq M[G]$.

Beweis. Wenn $x \in M$, dann gilt natürlich (nachdem $P \in M$) auch $\check{x} \in M^P$. Wir zeigen $\check{x}_G = x$ per $\in$-Induktion über x:

$x = \emptyset$: Dann gilt trivialerweise $\check{x} = \emptyset = x_G$.

IS: Gelte die Behauptung für alle $y \in x$. Per Definition:

$$\check{x}_G = \{\check{y}_G \mid ((\check{y}, 1_P) \in \check{x})\} = \{\check{y}_G \mid y \in x\} \stackrel{IV}{=} x$$

□

Damit erhalten wir auch sofort einen kanonischen Namen für G, nämlich $\Gamma := \{(\check{p}, p) \mid p \in P\}$. Nach Definition der Auswertung gilt dann $p = \check{p}_G \in \Gamma_G \Leftrightarrow p \in G$ und damit $\Gamma_G = G$. Somit folgt auch endlich $G \in M[G]$.

5 Die (ersten) ZFC-Axiome in $M[G]$

Bisher habe ich immer angenommen, dass M ein volles Modell der ZFC-Axiome ist. Ab jetzt werde ich nur noch annehmen, dass einige bestimmte Axiome in M gelten um zu zeigen, welche Axiome in M gebraucht werden, damit welche Axiome in $M[G]$ gelten. Die Existenz der leeren Menge ist bereits erledigt und es ist leicht zu sehen, dass dafür M nur transitiv sein, also die leere Menge enthalten muss. Die ersten zwei Axiome benötigen gar keine Axiome aus M:

Satz 5.1. *Extensionalitäts- und Fundierungsaxiom gelten in $M[G]$.*

Beweis. Das Extensionalitätsaxiom gilt einfach, weil $M[G]$ transitiv ist (jede transitive Menge ist trivialerweise extensional). Das Fundierungsaxiom gilt ebenfalls trivialerweise, weil es in $\mathbf{V}$ gilt (eine nicht-fundierte Menge in $M[G]$ wäre ja auch in $\mathbf{V}$ nicht-fundiert). □

Das Paarmengenaxiom wird direkt vererbt:

Satz 5.2. *Wenn M das Paarmengenaxiom erfüllt, gilt das Paarmengenaxiom auch in $M[G]$. Außerdem liegt für je zwei Mengen $a, b \in M[G]$ auch das geordnete Paar (a, b) in $M[G]$.*

Beweis. Seien $\sigma, \tau \in M^P$. Wir definieren zunächst auf M^P die Funktionen

$$up(\sigma, \tau) := \{(\sigma, 1_P), (\tau, 1_P)\} \qquad op(\sigma, \tau) := up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau))$$

Dann liefert *up* die Paarmenge und *op* das geordnete Paar:

Es gilt $up(\sigma, \tau), op(\sigma, \tau) \in M^P$ - das folgt direkt aus dem Paarmengenaxiom in M und daraus, dass $up(\sigma, \tau)$ selbst ein Name ist. Nachdem $1_P \in G$ gilt also für die Auswertungen

$$(up(\sigma, \tau))_G = \{(\sigma, 1_P), (\tau, 1_P)\}_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$$

$$\begin{aligned}(op(\sigma, \tau))_G &= (up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau)))_G = \{(up(\sigma, \sigma), 1_P), (up(\sigma, \tau), 1_P)\}_G \\ &= \{(up(\sigma, \sigma))_G, (up(\sigma, \tau))_G\} = \{\{\sigma_G\}, \{\sigma_G, \tau_G\}\} = (\sigma_G, \tau_G)\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also daraus, dass jedes $a \in M[G]$ die Form τ_G für irgendein $\tau \in M^P$ hat. □

Das Vereinigungsmengenaxiom braucht schon ein paar Vorraussetzungen mehr:

Satz 5.3. *Wenn das Vereinigungsmengenaxiom und endlich viele (bestimmte) Instanzen des Ersetzungsschemas in M gelten, gilt das Vereinigungsmengenaxiom in $M[G]$*

Beweis. Sei $\tau_G \in M[G]$ beliebig. Das Vereinigungsmengenaxiom erfordert nur, dass eine *Obermenge* der Vereinigung $\bigcup \tau_G$ existiert.

Betrachte die Menge $\bigcup \left\{\sigma \in M^P \mid \exists p \in P\ (\sigma, p) \in \tau\right\} =: \bigcup \pi$. Wegen dem Vereinigungsmengenaxiom in M kann man mit endlich vielen Anwendungen des Ersetzungsschemas zeigen, dass $\bigcup \tau \in M^P$. Dann gilt für jedes $\sigma_G \in \tau_G : \sigma \in \pi$. Dann gilt $\sigma \subset \bigcup \pi$ und damit auch $\sigma_G \subset (\bigcup \pi)_G$, also $\bigcup \tau_G \subseteq (\bigcup \pi)_G \in M[G]$. □

Man kann allerdings auch direkt einen Namen für die Vereinigungsmenge selbst angeben:

Satz 5.4. *Sei $\tau_G \in M[G]$ und*

$$\pi' := \{(\rho, s) \mid \exists (\sigma, r) \in \tau\ \exists q \in P\ ((\rho, q) \in \sigma \wedge s \leq q, r)\} \in M^P$$

Dann gilt $\pi'_G = \bigcup \tau_G$.

Beweis. Es gilt $\pi'_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G\ ((\sigma, p) \in \pi')\}$. Also gilt $\rho_G \in \pi'_G$ genau dann, wenn es ein $s \in G$ gibt so, dass $(\rho, s) \in \pi'$. Per Definition von π' ist das genau dann der Fall, wenn es $r, q \geq s$ und $\sigma \in M^P$ gibt mit $(\rho, q) \in \sigma$ und $(\sigma, r) \in \tau$.

Nachdem G ein Filter ist gilt $s \in G \Rightarrow r, q \in G$. Gilt umgekehrt $r, q \in G, (\rho, q) \in \sigma$ (für irgendein σ) und $(\sigma, r) \in \tau$, dann gibt es nach der Filtereigenschaft ein $s' \in G$ mit $s' \leq r, q$ und damit $(\rho, s') \in \pi'$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $s \in G \Leftrightarrow r, q \in G$.

Weiter gibt es so ein σ und $r, q \in G$ genau dann, wenn $\sigma_G \in \tau_G$ und $\rho_G \in \sigma_G$, also folgt endlich (weil alle Folgerungen gdw waren) $\pi'_G = \bigcup \tau_G$. $\square$

Dafür müssen wir aber davon ausgehen, dass $\pi' \in M^P$ (oder wir brauchen wieder eine Handvoll ZFC-Axiome in M, um dies zu zeigen).

Wir wissen jetzt also, wie wir die leere Menge, das Extensionalitätsaxiom, Fundierungsaxiom, Paarmengenaxiom und Vereinigungsmengenaxiom in $M[G]$ erhalten. Es fehlen also noch das Potenzmengenaxiom, Ersetzungsaxiom, Aussonderungsaxiom, Unendlichkeitsaxiom und Auswahlaxiom. Für die brauchen wir allerdings bereits die Forcingrelationen.

6 Die Forcingrelationen

Definition 6.1. Sei $\varphi(x_1, ..., x_n)$ eine $L_{Me} = \{\in\}$-Formel, $\tau_1, ..., \tau_n \in M^P$ und $p \in P$. Wir sagen p *forciert/erzwingt* $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ *über* M *mit* P (geschrieben $p \Vdash_{P,M} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ wenn gilt:

Für alle P-generischen Filter G über M mit $p \in M$ gilt $M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G)$

Zwei einfache Eigenschaften von $\Vdash$:

Lemma 6.1.

- *Wenn* $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ *und* $q \leq p$, *dann* $q \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$
- $p \vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ *und* $p \Vdash \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ *genau dann, wenn* $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$

Ersteres folgt direkt daraus, dass Filter nach oben abgeschlossen sind, zweiteres ist klar.

Diese Relation $\Vdash$ benötigt allerdings per Definition bereits Kenntnisse darüber, was in $M[G]$ für Formeln gelten. Der nächste Schritt ist also, eine andere Relation $\Vdash^*$ zu finden, die wir *ausschließlich* in M und über P definieren. Das Ziel ist dann zu zeigen, dass

$$p \Vdash \varphi \Leftrightarrow M \models (p \Vdash^* \varphi)$$

Dann haben wir gezeigt, dass P und M uns bereits alles über $M[G]$ sagen, was wir wissen wollen. Wir definieren $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ rekursiv über den Aufbau von φ:

Definition 6.2.

- $\varphi = \tau_1 \doteq \tau_2$: Definiere $p \Vdash^* \varphi$ (rekursiv) genau dann, wenn für alle $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ und $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ die Mengen

  $$\{q \leq p \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists (\sigma_2, r_2) \in \tau_2\ (q \leq r_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 \doteq \sigma_2)\}$$

  und

  $$\{q \leq p \mid q \leq s_2 \rightarrow \exists (\sigma_1, r_1) \in \tau_1\ (q \leq r_1 \wedge q \Vdash^* \pi_2 \doteq \sigma_1)\}$$

  dicht unter p sind.

- $\varphi = \tau_1 \in \tau_2$: Definiere $p \Vdash^* \varphi$ genau dann, wenn die Menge

  $$\{q \mid \exists (\pi, s) \in \tau_2\ (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi \doteq \tau_1)\}$$

  dicht unter p ist.

- $\varphi = \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi_2(\tau_1, ..., \tau_n)$: Definiere $p \Vdash^* \varphi$ genau dann, wenn
$$p \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n) \text{ und } p \Vdash^* \psi_2(\tau_1, ..., \tau_n)$$
- $\varphi = \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$: Definiere $p \Vdash^* \varphi$ genau dann, wenn für kein $q \leq p$ gilt $q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$
- $\varphi = \exists x \psi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$: Definiere $p \Vdash^* \varphi$ genau dann, wenn die Menge
$$\left\{r \mid \exists \sigma \in M^P \; r \Vdash^* \psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)\right\}$$
dicht unter p ist.

Folgendes Lemma gibt uns schonmal ein paar (offensichtlich intendierte) Eigenschaften der Relation $\Vdash^*$:

Lemma 6.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$
2. $\forall r \leq p \; (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$
3. *Die Menge* $\{r \mid r \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$ *ist dicht unter* p.

Beweis. (1) und (3) sind nur schwächere Formen von (2). Es reichen also die folgenden Implikationen. Wir beschränken uns zunächst auf die Basisfälle $\tau_1 = \tau_2$ und $\tau_1 \in \tau_2$:

(1)→(2) Sei $\varphi = \tau_1 \doteq \tau_2$. Nach Vorraussetzung gilt $p \Vdash^* \tau_1 \doteq \tau_2$ und damit sind für alle $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ und (π_2, s_2) die Mengen aus der vorherigen Definition dicht unter p. Dann sind die Mengen aber auch dicht unter r für jedes $r \leq p$ (nach Definition von *dicht*) und die Behauptung folgt. Der Fall $\varphi = \tau_1 \in \tau_2$ geht analog.

(3)→(2) Analog zum vorherigen Fall folgt das daraus, dass für eine beliebige Menge D gilt: Wenn $\{r \mid D \text{ ist dicht unter } r\}$ dicht unter p ist, dann ist D dicht unter p. Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Definition von *dicht*

Damit ist die Behauptung für die Basisfälle gezeigt; die anderen Fälle folgen induktiv über die rekursive Definition von $\Vdash^*$. □

...womit wir fast beim Forcing-Hauptsatz angekommen wären:

Satz 6.1. *Seien* $\tau_1, ..., \tau_n \in M^P$ *und* G *ein* P*-generischer Filter. Dann gilt:*

1. *Wenn* $p \in G$ *und* $M \models (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$, *dann* $M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G)$ *und umgekehrt:*
2. *Wenn* $M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G)$, *dann gibt es ein* $p \in G$ *so, dass* $M \models (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$

Der Beweis dafür ist ne brutale Technikschlacht, siehe Mildenberger-Skript Seite 68-70. Aber daraus folgt wie beabsichtigt:

Satz 6.2. ***Der Forcing-Hauptsatz:***

1. *Für alle* $p \in P$ *gilt*
$$p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow M \models (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$$

2. *Für alle P-generischen Filter G über M gilt*

$$M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G) \Leftrightarrow \exists p \in G\ (p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$$

Beweis. Die Rückrichtung von 1. und beide Richtungen von 2. folgen bereits per Definition oder aus dem vorherigen Satz. Bleibt die Hinrichtung von 1.:

Gelte $p \Vdash \varphi(\overline{\tau})$. Wir zeigen (wegen Lemma 6.2.(3)), dass $\{r \mid M \models (r \Vdash^* \varphi(\overline{\tau}))\} =: D$ dicht unter p ist.

Angenommen, dass nicht; dann gibt es also irgendein $q \leq p$ mir $r \leq q \Rightarrow r \notin D$. Nach Definition von $\Vdash^*$ gilt dann $M \models q \Vdash^* \neg\varphi(\overline{\tau})$. Nach Rückrichtung von 1. folgt $q \Vdash \neg\varphi(\overline{\tau})$ und damit auch $p \Vdash \neg\varphi(\overline{\tau})$, was einen Widerspruch in $M[G]$ erzeugt. □

Fassen wir ein paar generelle Eigenschaften der Forcingrelation zusammen (die sich größtenteils aus der Definition von $\Vdash^*$ und dem Forcing-Hauptsatz ergeben):

Lemma 6.3. *(a) $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi \vee p \Vdash \neg\varphi\}$ ist dicht.*

(b) $p \Vdash \neg\varphi$ gdw für kein $q \leq p$ gilt $q \Vdash \varphi$.

(c) $p \Vdash \exists x\varphi(x)$ gdw die Menge $\left\{r \mid \exists\sigma \in \boldsymbol{V}^P\ (r \Vdash \varphi(\sigma))\right\}$ dicht ist.

(d) Wenn $p \Vdash \exists x \in \sigma\ \varphi(x)$, dann gibt es ein $q \leq p$ und $(\pi, r) \in \sigma$ so, dass $q \Vdash \varphi(\pi)$

(Beweis Mildenberger-Skript S. 70/71)

Jetzt, wo wir die Forcing-Relation haben können wir auch zeigen, wie wir die fehlenden Axiome in $M[G]$ erhalten. Siehe Mildenberger-Skript Seite 71ff.

7 Standardmittel für Forcingbeweise und Beispiele

Eine der Standardordnungen für Forcing-Beweise (z.B. der Kontinuumshypothese) ist die Folgende:

Definition 7.1. Sei $\lambda \geq \omega$ eine Kardinalzahl und I, J Mengen. Dann ist

$$Fn(I, J, \lambda) := (\{f : A \to J \mid |f| < \lambda \wedge A \subseteq I\}, \leq)$$

Die Halbordnung der partiellen Funktionen von I nach J mit

$$f \leq g \Leftrightarrow g \subseteq f$$

Das *größte* Element der partiellen Ordnung ist also die leere Funktion $\emptyset$. Der Witz ist hierbei, dass ein generischer Filter über $Fn(I, J, \lambda)$ eine surjektive Funktion von I auf J in $M[G]$ liefert, das heißt $|J|$ wird unter Umständen in $M[G]$ kollabiert:

Lemma 7.1. *Seien $\lambda, I, J \in M$ nicht leer, λ eine unendliche Kardinalzahl* in *M und $|I|, |J| \geq \lambda$. Ist G ein $Fn(I, J, \lambda)^M$-generischer Filter über M, dann ist $\bigcup G : I \to J$ surjektiv und somit $M[G] \models |I| \leq |J|$.*

Beweis. Zunächst ist $Fn(I, J, \lambda)$ offensichtlich ein Splitting, da jede partielle Funktion jede Menge inkompatible Erweiterungen hat. Außerdem ist $\bigcup G$ überhaupt eine Funktion, weil nach Filtereigenschaft gilt $\forall f, g \in G\ \exists h \in G\ f, g \subseteq h$, je zwei partielle Funktionen haben also eine gemeinsame Erweiterung. Daraus folgt auch sofort, dass $\bigcup G$ eine volle Funktion auf ganz I ist.

Für die Surjektivität sei $j \in J$ beliebig. Die Menge

$$\{f \in Fn(I, J, \lambda) \mid \exists i \in dom(f)\ f(i) \doteq j\} =: D$$

ist dicht in $Fn(I, J, \lambda)$, weil sich offensichtlich jede partielle Funktion in $Fn(I, J, \lambda)$ zu einer Funktion erweitern lässt, die auf j abbildet. Also kann $G \cap D$ (weil generisch) nicht leer sein, also ist $j \in Im(\bigcup G)$ und somit $\bigcup G$ surjektiv. □

Für die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese könnte es also reichen, die Ordnungen $Fn(|\mathbb{R}|, \aleph_1, \omega)$ bzw. $Fn(\aleph_2, |\mathbb{R}|, \omega)$ zu betrachten - wir erhalten dann surjektive Funktionen $\mathbb{R} \to \aleph_1$ bzw. $\aleph_2 \to \mathbb{R}$ und somit muss $\mathbb{R} \leq \aleph_1$ bzw. $\mathbb{R} \geq \aleph_2$ gelten. Das Problem ist, dass $|\mathbb{R}|^M, \aleph_1^M$ und $\aleph_2^M$ nicht zwangsläufig in $M[G]$ auch noch Kardinalzahlen sind (sondern nur Ordinalzahlen). Wir brauchen also zusätzliche Kriterien, die dafür sorgen, dass $M[G]$ die Kardinalzahlen in M erhält.

Aber zuerst noch ein paar lustige andere Eigenschaften der Halbordnung, um sich an die Dichtheitsargumente zu gewöhnen:

Lemma 7.2. *Sei $Fn(I, J, \lambda), G$ wie oben, dann hat jedes Urbild $(\bigcup G)^{-1}(j)$ Mächtigkeit λ und liegt nicht in M.*

Proof. Betrachte für jede *Ordinal*zahl $\alpha < \lambda$ und $j \in J$ die Menge

$$D_\alpha := \left\{ f \in Fn(I, J, \lambda) \mid \exists R \subset (f^{-1}(j))^2 \text{ otp}(f^{-1}(j), R) \geq \alpha \right\}$$

(Also die Menge aller Funktionen f, deren Urbild $f^{-1}(j)$ sich durch α wohlordnen lassen)

Man kann jede Funktion in $Fn(I, J, \lambda)$ einfach um weniger als λ-viele Werte vom Ordnungstyp α erweitern, die auf j abbilden (weil $\alpha < \lambda$ und die Funktionen alle kleinere Mächtigkeit als λ haben), also ist D_α dicht und wird von G geschnitten. $(\bigcup G)^{-1}(j)$ hat also mindestens Ordnungstyp $\geq \alpha$ für jedes $\alpha < \lambda$, also λ viele Elemente.

Sei nun $A \in M$ eine beliebige Teilmenge von $Fn(I, J, \lambda)$ der Mächtigkeit λ und betrachte die Menge $D := \{f \in Fn(I, J, \lambda) \mid \exists a \in A\ f(a) \neq j\}$. Weil wieder jedes $f \in Fn(I, J, \lambda)$ *echt kleinere* Mächtigkeit als λ hat, kann f nicht auf allen Werten in A definiert sein und kann somit auf irgendein Element $a \in A$ erweitert werden. Also ist D dicht in $Fn(I, J, \lambda)$, wird also von G geschnitten und damit gilt $(\bigcup G)^{-1}(j) \neq A$. □

Um zu zeigen, wann Kardinalzahlen erhalten bleiben brauchen wir folgendes Konzept:

Über Konfinalitäten Sei α irgendeine Ordinalzahl. Die Konfinalität $cf(\alpha)$ von α ist *die kleinste Kardinalzahl μ so, dass es eine konfinale Teilmenge $A \subset \alpha$ gibt mit Mächtigkeit μ*. Eine Teilmenge $A \subset \alpha$ heißt dabei konfinal, wenn $\forall x < \alpha \exists a \in A\ x \leq a$ - oder anders ausgedrückt: wenn $\sup_{a \in A}(a+1) = \bigcup A = \alpha$. Entsprechend ist jedes Endstück einer geordneten Menge konfinal und jede Nachfolgerordinalzahl $\beta + 1$ hat automatisch Konfinalität 1 (weil die Teilmenge $\{\beta\}$ dann konfinal ist). Interessant sind Konfinalitäten also nur bei Limesordinalzahlen (wie z.B. Kardinalzahlen).

Beispiele:

- $cf(\omega) = \omega$: Jede endliche Teilmenge von ω hat ein maximales Element n, kann also nicht konfinal sein.
- $cf(\aleph_\omega) = \omega$: Die Teilmenge $\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ...\}$ hat Länge ω und ist konfinal in $\aleph_\omega$.
- $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ für alle Kardinalzahlen $\kappa \geq \omega$: Sei $A = \{\alpha_i \mid i \in \kappa\}$ eine beliebige Teilmenge von κ^+ mit Mächtigkeit $\leq \kappa$. Jedes Element in κ^+ (und somit in A) hat höchstens Mächtigkeit κ, also gilt $|\bigcup A| \leq \sum_{a \in A} |a| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa < \kappa^+$, womit A nicht konfinal sein kann.

Bei Kardinalzahlen sind also eigentlich auch nur die Konfinalitäten von Limeskardinalzahlen interessant. Ordinalzahlen mit $cf(\kappa) = \kappa$ heißen *regulär*, ansonsten *singulär*. Nachfolgerkardinalzahlen sind also alle regulär, Nachfolgerordinalzahlen alle singulär. Die Existenz regulärer Limeskardinalzahlen Λ (außer ω) kann in ZFC nicht bewiesen werden, weil dann V_Λ ein Modell von ZFC wäre und damit damit Con(ZFC) bewiesen wäre (das sind dann *große Kardinalzahlen*).[6]

[6] Jan erklärt deswegen ω zu einer großen Kardinalzahl und lehnt das Unendlichkeitsaxiom (mehr oder

Das Standard-Kriterium für das Erhalten von Kardinalzahlen beim forcen läuft über abzählbare Antiketten und braucht Konfinalitäten:

Definition 7.2. Sei P eine partielle Ordnung.

- Eine Teilmenge $A \subset P$ heißt *Antikette*, wenn alle Elemente von A paarweise inkompatibel sind; also $\forall a_1, a_2 \in A \neg \exists p \in P\ (p \leq a_1 \wedge p \leq a_2)$
- P hat die *countable chain condition (c.c.c.)*, wenn alle Antiketten in P (höchstens) abzählbar sind.

Es ergibt sich nun, dass:

Satz 7.1.

- *Wenn $|J| \leq \omega$, dann hat $Fn(I, J, \omega)$ die c.c.c.*
- *Wenn $M \models$„P hat die c.c.c.“, dann erhält P die Eigenschaft „κ ist regulär“. D.h. für alle P-generischen Filter G und Kardinalzahlen $\kappa \in M$ gilt:*
  $M \models$„κ ist regulär“$\Leftrightarrow M[G] \models$„$\kappa$ ist regulär“.
- *Wenn P die Eigenschaft „κ ist regulär“ erhält, dann auch konfinalitäten. D.h. für alle P-generischen Filter G und Limesordinalzahlen $\beta \in M$ gilt*
  $(cf(\beta))^M = (cf(\beta))^{M[G]}$.
- *Wenn P Konfinalitäten erhält, dann auch Kardinalzahlen. D.H. für alle P-generischen Filter G und alle Ordinalzahlen $\beta \in M$ gilt*
  $M \models$„β ist Kardinalzahl“$\Leftrightarrow M[G] \models$„$\beta$ ist Kardinalzahl“.

Beweis. Siehe Mildenberger-Skript Seite 76ff □

Man beachte bei Punkt zwei das „$M \models$“! Nachdem M abzählbar ist hat (von außen betrachtet) jede partielle Ordnung in M die c.c.c., aber *in* M muss das nicht der Fall sein. Punkt 1 ist aber allgemein in ZFC beweisbar, also auch insbesondere in M. $Fn(I, J, \omega)$ hat also auch in M die c.c.c. und erhält damit Kardinalzahlen (für $|J| \leq \omega$ zumindest). Aber jetzt können wir endlich forcen:

Satz 7.2. *CH ist unabhängig von ZFC*

Beweis. Beide Richtungen einzeln:

- Con(ZFC)→Con(ZFC+$2^\omega \geq \omega_2$): Betrachte die Halbordnung $Fn(\omega_2 \times \omega, 2, \omega) =: P$ in M und sei G ein P-generischer Filter über M. Dann ist also $\bigcup G : \omega_2 \times \omega \to 2$. Betrachte also die Projektionen $f_\alpha : \omega \to 2$ mit $f_\alpha(n) := \bigcup G(\alpha, n)$. Die Menge

  $$D_{\alpha,\beta} = \{f \in P \mid \exists n \in \omega\ (\alpha, n), (\beta, n) \in dom(f) \wedge f(\alpha, n) \neq f(\beta, n)\}$$

  ist offensichtlich dicht in P für jedes Paar (α, β) und somit $G \cap D_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$ und somit muss gelten $f_\alpha \neq f_\beta$. Es gibt also mindestens ω_2-viele paarweise verschiedene Funktionen $f_\alpha : \omega \to 2$ in $M[G]$ und dem vorherigen Satz nach erhält P Kardinalzahlen, womit gilt $M[G] \models 2^\omega \geq \omega_2$.

minder scherzhaft) ab. Nennen wir ZFC ohne das Unendlichkeitsaxiom ZFF, dann gilt tatsächlich
ZFC=ZFF+„Es gibt eine reguläre Limeskardinalzahl“=ZFF+Con(ZFF)
weil $V_\omega \models$ ZFF, genauso wie eben
ZFC+„Es gibt eine reguläre Limeskardinalzahl (außer ω)“=ZFC+Con(ZFC) gilt, weil $V_\Lambda \models$ ZFC.
Kurz: In ZFF ist das Unendlichkeitsaxiom äquivalent zu „Es gibt eine große Kardinalzahl“. Aus dem selben Grund werden auch Große-Kardinalzahl-Axiome gerne *strong infinity axioms* genannt, weil sie gewissermaßen das Unendlichkeitsaxiom verstärken.

- Con(ZFC)$\to$Con(ZFC+$2^\omega = \omega_1$): Betrachte die Halbordnung $Fn(\omega_1, 2^\omega, \omega_1) =: P$ in M und sei wieder G ein P-generischer Filter über M. Jede Funktion $f : \omega \to 2^\omega$ ist in P enthalten und die Vereinigung über jede absteigende, abzählbare Kette liegt wieder in P; es gibt in $M[G]$ also keine neuen Funktionen $\omega \to 2^\omega$, womit gilt, dass $(\omega_1)^M = (\omega_1)^{M[G]}$. Wie bereits gezeigt ist aber $\bigcup G$ eine surjektive Funktion $\omega_1 \to 2^\omega$, es muss also $M[G] \models \omega_1 \geq 2^\omega$ gelten.

$\square$