1 Fehler

Statistischer Fehler - Systematischer Fehler
Mittelwert

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardabweichung $\sigma = \Delta\overline{x}$, Varianz σ^2
Gaußsche Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Schätzwert des Fehlers (empirische Varianz)

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

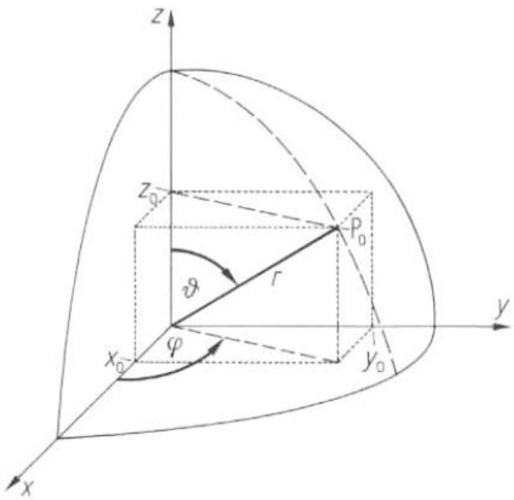
Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta f(y_1, ..., y_n) = \sqrt{\sum_j (\frac{df}{dy_j})^2 (\Delta y_j)^2}$$

$1\sigma \mapsto P = 68,34\%, 2\sigma \mapsto P = 95,4\%, 3\sigma \mapsto P = 99,7\%$

2 Koordinatensysteme

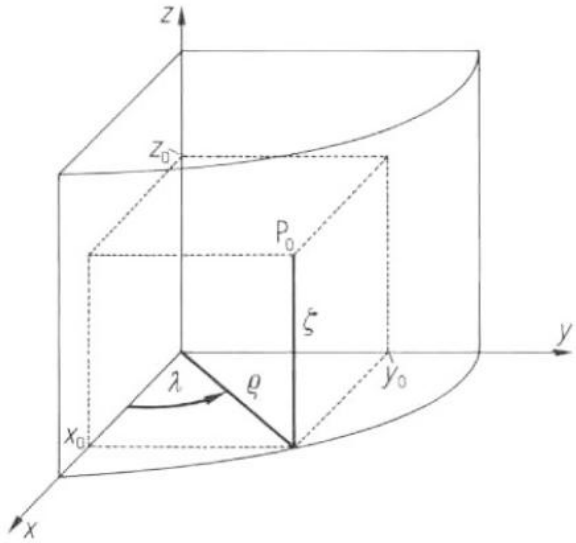
2.1 Kugelkoordinaten



$x_0 = r \cdot sin(\vartheta)cos(\varphi)$
$y_0 = r \cdot sin(\vartheta)sin(\varphi)$
$z_0 = r \cdot cos(\vartheta)$

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$
$\vartheta = arccos(\frac{z_0}{r})$
$\varphi = arctan(\frac{y_0}{x_0})$

2.2 Zylinderkoordinaten



$x_0 = \varrho \cdot cos(\lambda)$
$y_0 = \varrho \cdot sin(\lambda)$
$z_0 = \zeta$

$\varrho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$
$\lambda = arccos(\frac{x_0}{\varrho})$

3 Kinematik punktförmiger Körper

3.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$\vec{v}$ konstant:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \vec{v}(t) \int 1dt = \vec{v}(t) \cdot t + \vec{r}_0$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$\vec{a}$ konstant:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \vec{a}(t) \int 1dt = \vec{a}(t) \cdot t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

3.2 Freier Fall und Wurfbewegung

$$g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$$

Freier Fall:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, v_{End} = \sqrt{2gh}$$

Schiefer Wurf:

$$x(t) = v_x(0)t, y(t) = 0, z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z(0)t + h$$

$$v_x(0) = v_0 \cdot cos(\varphi), v_z(0) = v_0 \cdot sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z(x) = -\frac{gx^2}{2v_z^2(0)} + \frac{v_z(0)x}{v_x(0)} + h = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 cos(\varphi)})^2 + x \cdot tan(\varphi) + h$$

3.3 Gleichförmige Kreisbewegung

T=Umlaufdauer, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi}$=Kreisfrequenz/Winkelgeschwindigkeit, R=Radius, $v = R\omega$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot cos(\omega t) \\ R \cdot sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \cdot sin(\omega t) \\ R\omega \cdot cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 cos(\omega t) \\ -R\omega^2 sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t) \Rightarrow a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = v\omega$$

$$\vec{\omega} := \frac{1}{R^2} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

4 Kräfte

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

4.1 Schiefe Ebene

$\vec{F}_H$=Hangabtriebskraft, $\vec{F}_G$=Gewichtskraft, $\vec{F}_N$=Normalkraft

$$F_H = F_G \cdot sin(\alpha), F_N = F_G \cdot cos(\alpha)$$

4.2 Reibungskraft

μ=Reibungskoeffizient, $0 < \mu < 1$

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

4.2.1 in Gasen

ϱ=Dichte, A=Querschnittsfläche, C=Widerstandskoeffizient

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} C \varrho A v^2 \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho A}}$$

4.2.2 in Flüssigkeiten

$$F_R = b \cdot v^n$$

b=Proportionalitätskonstante, n=1 für kleine v, n=2 für große v
Auftriebskraft:

$$F_A = -m_f \cdot \vec{g}$$

m_f=Masse der verdrängten Flüssigkeit

$$\Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - m_f \cdot g - b \cdot v^n$$

$$\Rightarrow v_E = (\frac{mg}{b})^{\frac{1}{n}}$$

Im Falle einer Kugel ist $b = 6\pi\eta r$
η=Viskosität

$$v_E = \frac{2}{9}(\varrho - \varrho_f)\frac{gr^2}{\eta}$$

$$v(t) = v_E(1 - e^{-\beta t})(\text{ für } v_0 = 0)$$

$$\beta = \frac{b}{m} = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

4.3 Zentripetal/-fugalkraft

System rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Zentripetalbeschleunigung $a_{ZP} = \omega^2 r$

$$\vec{a}_{ZP} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ZF} = -\vec{F}_{ZP} = -m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

4.4 Corioliskraft

Abhängig von Geschwindigkeit v des Körpers(!)

$$\vec{a}_C = -2(\vec{\omega} \times \vec{v}) \Rightarrow \vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

4.5 Federkraft

$F_s = -s \cdot D$, D=Federkonstante

5 Transformationen

5.1 Galileo-Transformation

$\vec{u}$=Geschwindigkeit des bewegten Bezugssystem aus Sicht des statischen

$$\vec{r'}(t) = \vec{r}(t) - \vec{u}t \qquad \vec{v'} = \vec{v} - \vec{u}$$

Falls $\vec{u}$ nicht konstant:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}_0 t - \frac{1}{2}\vec{a}_{S'}t^2 \qquad \vec{v'}(t) = \vec{v}(t) - \vec{u}_0 - \vec{a}_{S'}t \qquad \vec{a'}(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{S'}$$

5.2 Rotierte Bezugssysteme

Drehung um den Winkel φ um die z-Achse:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r'} = \begin{pmatrix} x \cdot cos(\varphi) + y \cdot sin(\varphi) \\ -x \cdot sin(\varphi) + y \cdot cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

5.3 Lorentz-Tranformation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

System S' bewegt sich mit Geschwindigkeit v entlang der x-Achse:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \qquad t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$$

Insbesondere:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \frac{1}{\gamma}\Delta x'$$

6 Arbeit, Energie, Leistung

6.1 Arbeit

Bei konstanter Kraft: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Bei variabler Kraft:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\vec{r}(x)) \frac{d\vec{r}(x)}{dx} \cdot dx$$

wobei $\vec{r}(x)$ ein Parametrisierungsvektor ist

6.2 Kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

6.3 Potentielle Energie

$$W = \int_a^b \vec{F} d\vec{r} = -(U(b) - U(a)) \Rightarrow U(x) = -\int_0^x F dx$$

Gravitationsenergie: $F = mg, U(0) = 0 \Rightarrow U(h) = mgh$
Federenergie: $F = -sD, U(0) = 0 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{2} D s^2$

6.4 Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

7 Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

7.1 Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{\sum_i^n m_i} \qquad \vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \varrho(\vec{r}) dV$$

7.2 Zweikörperstöße

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$$

7.3 Elastischer Stoß

Eindimensionaler Stoß:

$$v_{1A} - v_{2A} = v_{2E} - v1E$$

$$v_{1E} = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})v_{1A} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2A}$$

Mehrdimensionaler Stoß an x-Achse mit Stoßparameter b (Abstand der Schwerpunkte) lösbar durch:

$$\begin{aligned} \text{Impuls x-Achse:} \quad m_1 v_{1A} &= m_1 v_{1E} cos(\phi_1) + m_2 v_{2E} cos(\phi_2) \\ \text{Impuls y-Achse:} \quad 0 &= -m_1 v_{1E} sin(\phi_1) + m_2 v_{2E} sin(\phi_2) \\ \text{Energie:} \quad \frac{1}{2}m_1 v_{1A}^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_{1E}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2E}^2 \end{aligned}$$

7.4 Raketenantrieb

M_0=Anfangsmasse, $\vec{v}$=Geschwindigkeit der Rakete, $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$=Relativgeschwindigkeit Rakete/Treibstoff

$$\vec{F}_{ext} = M_0\dot{\vec{v}} - \vec{v}_{rel}\dot{M}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_0 - \vec{v}_{rel} ln(\frac{M_0}{M})$$

Eindimensionaler Fall:

$$v(t_1) = v(t_0) + v_{rel} ln(\frac{m_0}{m(t_1)})$$

8 Drehbewegung starrer Körper

Drehimpuls L

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = rp \cdot sin(\phi)$$

8.1 Drehmoment τ/D

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF \cdot sin(\phi)$$

8.2 Trägheitsmoment I/θ

r=Abstand zur Drehachse

$$I = \sum_i^n m_i r_i^2 \qquad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Bei kontinuierlicher Masseverteilung:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \varrho(\vec{r}) dV$$

Parametrisierungsbeispiel an einer Scheibe:

$$\begin{aligned}
&I = \int_V r^2 dm \\
&dm = \frac{dA}{A} \cdot M \\
&\frac{dA}{dr} = r^2 \pi \cdot \frac{d}{dr} = 2\pi r \Rightarrow dA = 2\pi r \cdot dr \\
&\Rightarrow dm = M \frac{2\pi r}{\pi R^2} \cdot dr \\
&\Rightarrow I = \int_0^R r^2 M \frac{2\pi r}{\pi R^2} dr
\end{aligned}$$

8.3 Steinerscher Satz

I_{cm}=Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt, M=Gesamtmasse des Körpers, I_p=Trägheitsmoment im Punkt P, der zum Schwerpunkt den Abstand d hat:

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

Fun fact: Die kinetische Energie eines rollenden Körpers ergibt sich entweder durch die Translationsenergie+Rotationsenergie im Schwerpunkt *oder* durch die Rotationsenergie mit der selben Winkelgeschwindigkeit um eine Achse durch den Auflagepunkt, was mit dem Steinerschen Satz recht chillig zu berechnen ist ;-)

8.4 Hauptträgheitsachen

Wenn $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$ liegt, gilt:

$$L = I\omega \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Ansonsten bilden $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ einen Winkel φ und es gilt:

$$L = \frac{I}{sin(\varphi)} \omega$$

Vergleich zwischen linearer Bewegung und Drehbewegung			
lineare Bewegung		Drehbewegung	
Verschiebung	Δx	Drehwinkel	$\Delta\varphi$
Geschwindigkeit	$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}$
Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v\rangle \Delta t$ $\langle v\rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\varphi = \langle\varphi\rangle \cdot \Delta t$ $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\varphi$
Masse	m	Trägheitsmoment	Θ
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = \Theta \cdot \omega$
Kraft	F	Drehmoment	D
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Leistung	$P = Fv$	Leistung	$P = D \cdot \omega$
zweites Newtonsches Axiom	$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ma$	zweites Newtonsches Axiom	$D = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \Theta \cdot \alpha = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$

9 Gravitation

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}(\cdot\frac{\vec{r}}{r}) \qquad G = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}(=\frac{m^3}{kgs^2})$$

9.1 Satellitenbahn

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

9.2 Fluchtgeschwindigkeit

$$\frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{GmM}{R} \qquad \Rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

10 Flüssigkeiten und Gase

$$\text{Dichte: } \varrho = \frac{m}{V}$$

$$\text{Druck: } p = \frac{F}{A}$$

$$\text{Kompressibilität: } k = \frac{-1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$$

10.1 Hydraulische Presse

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

10.2 Schweredruck

$$p(h) = \varrho g h$$

Druck ist unabhängig von Form und Gesamtgewicht der Flüssigkeit

11 Strömende Flüssigkeiten

$$\text{Volumenstrom: } I_{Vol} = \frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \text{Stoffmenge: } I_Q = \varrho\frac{dV}{dt}$$

$$\text{Massendichte } \rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow I = \vec{A}\rho\vec{v}$$

$$\text{Stromdichte: } \vec{j} = \rho\vec{v} \Rightarrow I = \vec{A}\vec{j}$$

$$\text{Bernoulli-Gleichung: } p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

12 Schwingungen

12.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

x_0 =maximale Schwingungsamplitude, $\omega_0 = \frac{2\pi}{t} = 2\pi f$ =Schwingungsfrequenz, φ_0 =Anfangsphase

$$\Rightarrow v(t) = -x_0\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad a(t) = -x_0\omega_0^2 cos(\omega_o t + \varphi_0)$$

Federpendel: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Mathematisches Pendel: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physikalisches Pendel: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}}$ (R=Abstand zum Schwerpunkt, θ=Trägheitsmoment im Drehpunkt)

12.2 Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Lösungsansatz: $x(t) = ce^{\lambda t}$

12.2.1 Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\gamma < \omega_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\gamma t} cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$