Basis-Kram

Allgemein:

- *Betrag:* $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$:

$$(B1)\ \ |a| \geq 0,\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad (B2)\ \ |ab| = |a|\,|b| \qquad (B3)\ \ |a+b| \leq |a| + |b|$$

- *Norm:* $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$:

$$(N1)\ \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad (N2)\ \ ||\alpha x|| = |\alpha|\,||x|| \qquad (N3)\ \ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

- *Skalarprodukt:* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$:

$(S1):\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad (S2)\ \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \qquad (S3)\ \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \qquad (S4)\ \langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- *Metrik:* $D : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$(M1)\ d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \qquad (M2)\ d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) \qquad (M3)\ d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$$

- *Bernoulli-Ungleichung:* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper, $x \in \mathbb{K}, x \geq -1\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq (1+nx)$
- *Höldersche Ungleichung:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, g \in (1, \infty) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_p\, ||y||_q$$

- $\Rightarrow$ *Cauchy-Schwarz-Ungleichung:* $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : |\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2\, ||y||_2$
- *Minkovski-Ungleichung:* $p \in [1, \infty) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{C}^n : ||\langle x, y\rangle||_p \leq ||x||_p\, ||y||_p$
- $$\text{Geometrisches Mittel} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \text{Arithmetisches Mittel}$$

- *Exponentialreihe:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \mapsto \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

- Trigonometriebla:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- *Multiindex*: $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad \alpha! = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k! \qquad x \in \mathbb{R}^n : x^\alpha = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$$

Analytische Grundlagen:

- *Stetigkeit in a:* $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$
  Äquivalent: $\forall (a_n) \in D \mid (a_n) \mapsto a : f(a_n) \mapsto f(a)$
- *Beschränkt:* $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : s \leq (\geq) a$
- *Offene Kugel:* $B_\epsilon(a) = \{x \mid |x-a| < \epsilon\}$
- $a \in \mathbb{R}^n \supset \Omega$ heißt *Häufungspunkt* von Ω gdw $\forall \epsilon \exists y \in \Omega \setminus \{a\} : y \in B_\epsilon(a)$
  Äquivalent:$\exists (a_n) \subset \Omega \setminus \{a\} : \lim_{n \to \infty} a_n = a$

- *Abgeschlossen:* $[a, b]$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt
  A heißt kompakt, wenn abgeschlossen und beschränkt, endliche Vereinigung und beliebige Schnitte von abgeschlossenen (kompakten) Mengen sind wieder abgeschlossen (kompakt)
  f stetig, K kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt
  Offen: (a, b) $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Offen, wenn $\forall x \in \Omega \exists \epsilon : B_\epsilon(x) \subset \Omega$
  Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen.
- *Inneres:* $= \{x \in A \exists \epsilon : B_\epsilon(x) \subset A\}$ $\quad$ *Abschluss:* $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \epsilon : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$
  Rand: $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \epsilon : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\epsilon(x) \cap \mathbb{R}^n \setminus A \neq \emptyset\}$
- b, a sind *Supremum/Infimum* von A gdw $\forall x \in A : x \leq b$ bzw $x \geq a$
  b, a sind *Maximum/Minimum*, wenn $a, b \in A$
- *Gleichmäßige Stetigkeit:* $\forall \epsilon \exists \delta \forall x, x' : (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x') < \epsilon|)$
  $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig
- *Konvex:* $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ (Linkskurve) $\quad$ *Konkav:* $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ (Rechtskurve)
- *Zwischenwertsatz:* Sei f stetig und diffbar auf $[a, b]$ mit $f(a) \leq z \leq f(b) \Rightarrow \exists a \leq x \leq b : f(x) = z$
- $f : U \to V$ bijektiv und $f \in C^p(U, \mathbb{R}^n), f^{-1} \in C^p(V, \mathbb{R}^n)$
  f heißt Homöomorphismus, falls $p = 0$, Diffeomorphismus falls $p = 1$ und C^p-Diffeomorphismus, falls $p > 1$
- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *m-Dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$*, falls $\forall p \in M \; \exists \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni p, \; \Omega$ offen, und es einen C^r-Diffeomorphismus $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ gibt, so dass $\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega)$
  $M \subset \mathbb{R}^n, \; n = m + k$, es sind äquivalent:
  1. M ist eine m-Dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$
  2. $\forall p \in M \exists \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni p$, Ω offen und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\text{Rang}(f') = k$ auf Ω
  3. $\forall p \in M \exists$ offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $p \in U \times V$ und $g \in C^r(U, V)$, so dass (bei geeigneter Numerierung der Koordinaten): $M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$

  Jede n-dimensionale C^1-Untermanigfaltigkeit $M \subset R^{m+k}$ ist σ-Kompakt, d.h. $\exists (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Mengen in $\mathbb{R}^{m+k}$, so dass $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$
- *Gammafunktion:*
  $$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$$
- *Banachscher Fixpunktsatz:* Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ eine *Kontraktion*, d.h. $\exists q \in [0, 1) \forall x_1, x_2 \in X : d(f(x_1), f(x_2)) \leq q d(x_1, x_2)$, so hat f genau einen Fixpunkt x_* und $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen x_*

Konvergenz

- $\mathbb{R}:$ (a_n) heißt *konvergent mit Grenzwert* a gdw $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \forall m \geq n_0 : |a - a_m| < \epsilon$
  $\mathbb{R}^n:$ (a_n) heißt *konvergent mit Grenzwert* a gdw $\lim_{n \to \infty} |a_n - a| = 0$
- a heißt *Häufungspunkt* von (a_n) gdw eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert, so dass $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$
- *Grundlegende Folgen/Reihen:*
  $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} q^n = 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
- Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn $\forall \epsilon \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$
  Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert gdw sie eine Cauchy-Folge ist
- Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt *absolut konvergent* gdw $\sum_k |a_k|$ konvergiert
- *Leibnizkriterium*: $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton fallende Nullfolge
  $$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = s \text{ konvergiert und } 0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_n, \qquad |s - s_n| \leq a_n$$

- *Majorantenkriterium:*
$$\exists (c_n) \in (0,\infty) : \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty, a_k \leq |c_k| \, \forall k \Rightarrow (a_n) \text{ konvergiert}$$
- *Quotientenkriterium:*
$$\exists \vartheta \in [0,1) \exists n_0 : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \vartheta \forall k \geq n_0 \Rightarrow (a_n) \text{ konvergiert}$$
- *Wurzelkriterium:*
$$\lim_{n\mapsto\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow (a_n) \text{ konvergiert}$$
- *Cauchyprodukt:* $s_n = \sum_i^n a_i,\ t_n = \sum_j^n b_j,\ d_\ell := \sum_i^\ell a_i b_{\ell-i},\ \sum_\ell d_\ell$ heißt Cauchy-Produkt, wenn konvergent.
$\sum a_n,\ \sum b_n$ konvergieren $\Rightarrow$ Das Cauchyprodukt konvergiert mit $\lim d_\ell = (\lim \sum a_n)(\lim \sum b_n)$
- *l'Hopital:* $f,g : (a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und diff.bar, $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0, g(x) \neq 0, g'(x) \neq (0)$
$$\Rightarrow \forall x \in (a,b] : \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
- *Satz von Bolzano-Weierstrass:* $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : (x_{n_k})$ konvergiert

Differentiation

- *Differentialquotient:*
$$f'(x_0) = \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
- *Partiell differenzierbar nach x_i:*
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x_0+he_i)-f(x_0)}{h}$$
- *Gradient:* $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$
Der Gradient zeigt in Richtung der größten Steigung $\Leftrightarrow \max_e \left\{\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)\right\} = \frac{f'(x_0)}{|f'(x_0)|}$
- *Richtungsableitung nach e:* $|e| = 1$:
$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x_0+he)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)e$$
- *Hesse-Matrix:* $f''(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$
$f'(x) = 0, f''(x)$ pos.def.(neg.) $\Rightarrow x$ ist minimum (maximum)
- *Jacobi-Matrix:* $f'(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ heißt } \textit{Differenzierbar} \text{ in } x_0, \text{ wenn } \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0 \quad (A = f'(x_0))$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f \text{ stetig differenzierbar} & \Leftrightarrow & f \text{ stetig partiell differenzierbar} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f \text{ differenzierbar} & \Rightarrow & f \text{ partiell differenzierbar} \\ \Downarrow & & \\ f \text{ stetig} & & \end{array}}$$

- *Produktregel/Quotientenregel/Kettenregel/Umkehrregel:*
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \qquad (f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g' \qquad (f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))^{-1}$$
Die Kettenregel/Umkehrregel gilt auch bei $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f'/g'/(f^{-1})'$ als entsprechende Jacobimatrix
- *Kettenregel für partielle Ableitungen:*
$$\frac{\partial f\circ g}{\partial y_i}(y_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(y_0)) \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(y_0)$$

- *Taylor-Reihe:*

$$\mathbb{R}: \ f \in C^n \Rightarrow \exists c : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$\mathbb{R}^n: \ f \in C^n(\Omega), \Omega \text{ offen}, [x,a] \in \Omega \Rightarrow \exists c \in (x,a) : f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n-1} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{f^{(\alpha)}(c)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

- *Satz von Rolle:* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$ und $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x \in (a,b) : f'(x) = 0$
- *Lipschitz-Stetigkeit:* f stetig, diffbar auf (a,b): $|f'(x)| \leq c \forall x \in (a,b) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq c\,|x-y| \ \forall x, y \in [a,b]$
- *Schrankensatz:* f stetig, diffbar auf (a,b), $m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \forall y, z \in [a,b], y \leq z : m(z-y) \leq f(z) - f(y) \leq M(z-y)$$

- *1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung:* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig+diffbar

$$\Rightarrow \exists x \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

- *2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung:* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig+diffbar

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

- *Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$:* $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists 0 \leq t \leq 1 : x = at + (1-t)b\} \subset \Omega$:

$$\exists \xi \in (a,b) = [a,b] \setminus \{a,b\} : f(a) - f(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi)(a_k - b_k) = f'(\xi)(a-b)$$

- *Fundamentalsatz über inverse Abbildungen:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, p > 0, f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\det f'(a) = 0$
  $\Rightarrow \exists$ offene $U, V \subset \mathbb{R}^n$:
  1. $a \in U, f(a) \in V$
  2. $f : U \to V$ ist bijektiv, mit $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n), f^{-1} \in C^p(V, \mathbb{R}^n)$
  3. $f \circ f^{-1} = Id$ auf V und $f^{-1} \circ f = Id$ auf U
  4. Die Umkehrregel für Ableitungen gilt
- *Satz über implizite Funktionen:* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m, \ f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^m), \ \Omega$ offen
  $\Omega \ni (a,b) := (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ Falls $f(a,b) = 0$ und $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j+n}}(a,b)\right)_{i,j=1,...,m} \neq 0$, dann existiert eine offene Umgebung U um a, $U \subset \mathbb{R}^n$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften:
  1. $g(a) = b, \ g \in C^p(U, \mathbb{R}^m)$
  2. $\forall x \in U : f(x, g(x)) = 0$
  3. $\forall x \in U : f(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$ (In einer offenen Umgebung von b)

$$\text{Es gilt: } g'(x) = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(x, g(x))\right)^{-1}_{i,j=1,...,m} \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, g(x))\right)_{i=1,...,m;\, k=1,...,n}$$

- *Extremalprobleme unter Nebenbedingungen:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega), \ h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p), \ p < n$, $\mathrm{Rang}(h'(x)) = p \forall x \in \Omega$
  Gilt für $x_0 \in M = \{x \in \Omega \mid h(x) = 0\} : \ f(x_0) \leq f(x) \forall x \in M$ oder $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in M$, dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x_0) = 0 \qquad (j = 1, .., n)$$

- *Gramsche Matrix:* $T : U \to V$ C^k-Diffeomorphismus, $g(x) := (T'(x))^T T'(x) = (\langle \partial_i T(x), \partial_j(x) \rangle) = (g_{ij}(x))$
  $\Rightarrow$ Transformationssatz:

$$\int_V h(y)dy = \int_{T^{-1}(V)=U} h(T(x))\sqrt{\det g(x)}dx \qquad \lambda^n(TA) = \int_A \sqrt{\det g(x)}dx$$

- *Umrechnungssatz für Differentialoperatoren:* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U,V)$ Diffeomorph mit Gramscher Matrix g
  1. $v \in C^1(V), u := v \circ \phi$:
  $$(\mathrm{grad} v) \cdot \phi = (\phi \mathrm{grad}_g u)' := \left(\phi \sum_{i,j} g_{ij} \partial_i u e_j\right)'$$
  2. $Y \in C^1(V, \mathbb{R}^n), Y \circ \phi = \phi' \cdot X$:
  $$(\mathrm{div} Y) \circ \phi = \mathrm{div}_g X := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(\sqrt{\det g} X_j\right)$$
  3. $\phi \in C^2(U,V), v \in C^2(V), u := v \circ \phi$:
  $$(\triangle\ v) \circ \phi = \mathrm{div}_g \mathrm{grad}_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(\sqrt{\det g} g_{ij} \partial_j u\right) =: \triangle_g\ u$$

Maßtheorie

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Mengenalgebra*, wenn gilt:
  $$\emptyset \in \mathcal{A} \qquad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \qquad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$$
- Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra*, wenn $\mathcal{A}$ σ-Additiv ist
  Der Schnitt über beliebige σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra
  $\mathcal{L}^k$ heißt *Borelsche σ-Algebra* und wird von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ erzeugt
- $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt (Mengen-)*Ring*, wenn gilt:
  $$\emptyset \in \mathcal{R} \qquad A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R} \qquad A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$$
  $X \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ ist eine Mengenalgebra
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Dynkin-System*, wenn gilt:
  $$X \in \mathcal{D} \qquad A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D} \qquad (D_i) \subset \mathcal{D} \text{ paarweise disjunkt } \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}$$
  Ein Schnittstabiles Dynkin-System ist eine σ-Algebra
  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ schnittstabil $\Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$
- $\mathcal{R}$ Ring, $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt *Inhalt*, wenn gilt:
  $$\mu(\emptyset) = 0 \qquad \text{Für paarweise disjunkte } (A_i)_{1 \le i \le n} \subset \mathcal{A} : \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$
  Ein σ-additiver Inhalt heißt *Prämaß*
- $\mathcal{A}$ σ-Algebra, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt *Maß*, wenn gilt:
  $$\mu(\emptyset) = 0 \qquad \text{Für paarweise disjunkte } A_i \in \mathcal{A} : \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
  Ein Maß ist ein Prämaß auf einer σ-Algebra
- *Lebesgue-Inhalt*: $\mathcal{I}^k := \left\{(a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}^k, a \le b\right\}$ $\mathcal{F}^k := \mathcal{R}(\mathcal{I}^k)$
  $$\lambda((a,b]) := \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \qquad \mathcal{F}^k \ni F = \sum_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow \lambda(F) := \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$$

- $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i \text{ für fast alle } A_i\}$$

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \{x \in X \mid \exists n_0 : x \in A_i \forall i \geq n_0\}$$

  $\liminf A_n \subset \limsup A_n$
  Für $\liminf A_n = \limsup A_n =: A$ heißt (A_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

- *Stetigkeitssatz für Prämaße*, sei μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Für:

  1. μ ist Prämaß
  2. $(A_n) \subset \mathcal{R},\ A_n \uparrow A \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ (Stetigkeit von unten)
  3. $(A_n) \subset \mathcal{R},\ A_n \downarrow A \in \mathcal{R}, \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ (Stetigkeit von oben)
  4. $(A_n) \subset \mathcal{R},\ A_n \downarrow \emptyset, \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \downarrow 0$ (Stetigkeit in $\emptyset$)

  gelten folgende Implikationen: $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3 \Leftrightarrow 4$
  $2 \Leftrightarrow 3$ gilt für alle Mengen mit endlichem Inhalt $\Rightarrow 1, 2, 3, 4$ sind äquivalent für endliche Inhalte

- $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *kompaktes Mengensystem*, wenn gilt:

$$\forall (E_n) \subset \mathcal{E} \text{ mit } \forall n : \bigcap_{i=1}^{n} E_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \emptyset$$

  Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ heißt *kompakt approximierbar*, wenn es ein kompaktes Mengensystem $\mathcal{E}$ gibt, so dass:

$$\forall A \in \mathcal{R}, \epsilon > 0 \exists C \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{R} : B \subset C \subset A \wedge \mu(A \setminus B) < \epsilon$$

  μ ist kompakt approximierbar $\Rightarrow \mu$ ist ein Prämaß, insbesondere ist λ damit ein Prämaß

- $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt *äußeres Maß*, wenn gilt:

$$\mu^*(\emptyset) = 0 \qquad A_1, A_2 \in X, A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2) \qquad (A_n) \subset \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

  $A \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *μ^*-messbar*, wenn $\forall B \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^C)$
  Die Menge alles μ^*-messbaren Mengen ist eine σ-Algebra, auf der μ^* ein Maß bildet

- *Maßerweiterungssatz:* Sei $\mu : \mathcal{R} \supset \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Ein Prämaß, dann gilt:

  1. Es gibt ein Maß $\overline{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\overline{\mu}/\mathcal{R} = \mu$
  2. Für $A \in \mathcal{P}(X) :\ \mathcal{U}(A) := \{(A_n) \subset \mathcal{R} \mid (A_n) \text{ paarweise disjunkt}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$ gibt es ein Maß

$$\mu^*(A) := \inf_{(A_n) \in \mathcal{U}(A)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \right\}$$

     auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu^*/\mathcal{R} = \mu$ (*Caratheodory-Fortsetzung*)

- Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{R}$, μ die Caratheodory-Fortsetzung. Dann gilt $\forall Q \in X \exists A \in \sigma(\mathcal{R}) : Q \subset A, \mu^*(Q) = \mu(A)$
  A heißt *messbare äußere Hülle* von Q

- *Lebesgue-Borel-Maß:* Es gibt genau ein Maß auf $\mathcal{L}^k$ mit $\lambda^k(I) = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$ für $I = (a, b] \in \mathcal{I}^k$
  λ^k ist das einzige normierte, translationsinvariante Maß auf $\mathcal{L}^k$, ist invariant unter orthogonalen Transformationen und 0 für Hyperebenen
  Für $S \in \mathbb{R}^{k \times k} : \lambda^k(SA) = |\det S|\, \lambda^k(A)$

- $(X, \mathfrak{a}), (X', \mathfrak{a}')$ Maßräume, $T : X \to X'$ heißt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$-*messbar* gdw $T^{-1}(\mathfrak{a}') \subset \mathfrak{a}$
  $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(X_2) \Rightarrow T^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}))$
  $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, T stetig $\Rightarrow T$ ist $(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m)$-messbar

$$(X_i, \mathfrak{a}_i) \text{ Maßräume}, f_i : X \to X_i, i \in I : \quad \sigma(f_i, i \in I) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{a}_i)\right)$$

- $(X_1, \mathfrak{a}_1, \mu)$ Maßraum, $f : \mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}_2$, $\mu^f(A_2) := \mu(f^{-1}(A_2))$ heißt *Bildmaß von μ unter f*

Integration

Riemann-Integral

- Sei Q ein Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Z = \{Q_k \mid k \in \mathbb{N}_p\}$ eine Zerlegung von Q, dann heißen
$$U(Z,f) = \sum_{k \in \mathbb{N}_p} \left(\inf_{x \in Q_k} f(x) \right) |Q_k| \qquad O(Z,f) = \sum_{k \in \mathbb{N}_p} \left(\sup_{x \in Q_k} f(x) \right) |Q_k|$$
Unter-/Obersumme von f zur Zerlegung Z
Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von Q, f heißt *Riemann-Integrierbar*, wenn gilt:
$$\sup_{Z \in \mathcal{Z}} U(Z,f) =: \underline{\int_Q} f(x)dx = \overline{\int_Q} f(x)dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}} O(Z,f)$$
$E \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordansche Nullmenge*, wenn $\forall \epsilon \exists$ Quader $Q_k(k = 1, ..., N)$, so dass gilt:
$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k \qquad \sum_{k=1}^{N} |Q_k| < \epsilon$$
Eine kompakte Menge heißt *Jordanbereich*, wenn ihr Rand eine Jordansche Nullmenge ist.
Sei J ein Jordanbereich, $J \subset Q$ ein Quader, $f \in C^0(J)$, dann definieren wir:
$$\int_J f(x)dx := \int_Q f(x)\xi_J(x)dx \qquad |J| = \int_J 1dx$$

- *Satz von Fubini:* $Q \subset \mathbb{R}^p, R \subset \mathbb{R}^q$ Quader, $f : Q \times R \to \mathbb{R}$ beschränkt und auf $Q \times R$ Riemann-Integrierbar, dann sind die Ober- und Unterintegrale über R Riemann-Integrierbar in Q und es gilt:
$$\int_{Q \times R} f(x,y)d(x,y) = \int_Q \left(\underline{\int_R} f(x,y)dy \right) dx = \int_Q \left(\overline{\int_R} f(x,y)dy \right) dx \qquad x \in Q$$

Lebesgue-Integral

- $(\Omega, \mathfrak{a})$ ist Messraum, dann heißt $f : (\Omega, \mathfrak{a}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{L}})$ *Numerische Funktion*
Für $(\Omega, \mathfrak{a}, \mu)$ Maßraum ist $\overline{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z})$ die Menge aller (reellen) messbaren numerischen Funktionen
$\mathcal{E} := \{f \in \mathcal{Z} \mid |f(\Omega)| < \infty\} = \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}; (A_i)_{1 \le i \le n} \subset \mathfrak{a} \text{ messbare Zerlegung von } \Omega, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$
- *Darstellungssatz:*
  1. $f \in \mathcal{Z} \Rightarrow \exists (g_n) \subset \mathcal{E} : |g_1| \le |g_2| \le ... \wedge f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$
  2. $f \in \mathcal{Z}_+ \Rightarrow \exists (g_n) \subset \mathcal{E}_+ : g_n \uparrow f$
  3. $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \Rightarrow \exists (g_n) \subset \mathcal{E} : \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \Omega} |g_n(x) - f(x)| = 0$
- Maße sind unabhängig von der Zerlegung: Seien $A_1, ..., A_n$ und $B_1, ..., B_m$ messbare Zerlegungen von Ω und $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i 1_{B_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$
Entsprechend definieren wir:
$$\text{Für } \mathcal{E} \ni f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} =: \int f d\mu$$
$$\text{Für } \overline{\mathcal{Z}}_+ \ni f,\ (f_n) \subset \mathcal{E}_+,\ f_n \uparrow f : \lim \int f_n d\mu =: \int f d\mu$$
Für $\overline{\mathcal{Z}} \ni f$ heißt *Quasi-Integrierbar* ($\in \mathcal{L}^*(\mu)$), wenn $\int f^+ d\mu < \infty$ oder $\int f^- d\mu < \infty$
f heißt *μ-Integrierbar* ($\in \mathcal{L}^1(\mu)$), wenn $\int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$
$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu =: \int f d\mu$$

- Für $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ gilt:
$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f| \leq g \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-Integrierbar
$$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\lambda^1_{[a,b]}), \int\limits_{[a,b]} f d\lambda^1 = \int_a^b f(x)dx$$
- *Verallgemeinerter Hauptsatz des Lebesgue-Integrals:* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar in (a,b), f' bschränkt:
$$\Rightarrow f' \in \mathcal{L}^1(\lambda^1_{[a,b]}), \int\limits_{[a,b]} f' d\lambda^1 = f(b) - f(a)$$
- $\mathcal{L}^p := \left\{ f \in \overline{\mathcal{Z}} \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1 \right\}$
$\mathcal{L}^\infty := \left\{ f \in \overline{\mathcal{Z}} \mid f\mu\text{-fast sicher beschränkt} \right\}$
$$||f||_p := \begin{cases} (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \int |f|^p \, d\mu & 0 < p < 1 \end{cases}$$
$$||f||_\infty := \int \{s > 0, |f| < s[\mu]\}$$
- *Träger:* $\text{spt} f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$
- Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt: $d(x,K) := \inf\limits_{z \in K} |x - z|$
- $C_k(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \ \text{spt} f \text{ kompakt+stetig}\}$
- *Approximationssatz:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \lambda^n) : \exists (f_n) \subset C_k(\Omega)$ mit $||f - f_n||_p \to 0$
- *Satz von Fubini (mal wieder):* $(\Omega_i, \mathfrak{a}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume, $(\Omega, \mathfrak{a}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2)$
  1. Für $A \in \mathfrak{a}, x_1 \in \Omega_1$ heißt $A_{x_1} := \{x_2 \in \Omega_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \in \mathfrak{a}_2$ x_1*-Schnitt* von A
  2. Für $A \in \mathfrak{a}$ heißt $\mu_1 \otimes \mu_2(A) := \int \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1)$ *Produktmaß* von μ_1 und μ_2
  3. Für $g \in \overline{\mathcal{Z}}_+ \cup \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:
$$\int g d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int g(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) = \int \left(\int g(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

  Es gibt genau ein Maß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \forall A_i \in \mathfrak{a}_i$
- *Dichtemaße*: $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$:
$$\nu = f\mu \Leftrightarrow \nu(A) = \int\limits_A f d\mu$$
  Für $g \in \overline{\mathcal{Z}}$ oder $g \in \mathcal{L}^1(\nu) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:
$$\int g d\nu = \int g f d\mu$$
  ν heißt μ-stetig, wenn $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{N}(\nu)$ (geschrieben: $\nu \ll \mu$)
  $\nu = f\mu \Rightarrow \nu \ll \mu$
- *Zerlegungssatz für Maße:* Seien μ, ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{a}) \Rightarrow \exists A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{a}$ paarweise disjunkt, so dass:
  1. $\Omega = A_1 + A_2 + A_3$
  2. $\nu(A_3) = \mu(A_1) = 0$
  3. $\exists g \in \overline{\mathcal{Z}}_+, g(x) > 0 \forall x \in A_2$:
$$\nu(A) = \int\limits_A g d\mu \qquad \mu(A) = \int\limits_A \frac{1}{g} d\nu \qquad \forall \mathfrak{a} \ni A \subset A_2$$
- *Satz von Radon-Nikodym:* Seien μ, ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{a})$, dann gilt: ν hat μ-Dichte $f \Leftrightarrow \nu \ll \mu$
Das μ-fast sicher eindeutige $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$ heißt *Radon-Nikodym-Ableitung* $f =: \frac{d\nu}{d\mu}$

- *Lebesguescher Zerlegungssatz:* Seien μ, ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{a})$, dann existieren eindeutig bestimmte σ-endliche Maße ν_1, ν_2, so dass $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 \ll \mu$ und $\nu_2 \perp \mu$, also $\exists A \in \mathfrak{a} : \mu(A) = \nu_2(A^C) = 0$
- *Transformationssatz:* Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ Diffeomorph, dann gilt:

$$A \in \mathfrak{a}^*_{\lambda^n} \cap U \Rightarrow T(A) \in \mathfrak{a}^* \cap U \qquad \lambda^n_V(T(A)) = \int\limits_A |\det T'(x)| \, d\lambda^n_U(x)$$

  (wobei T' die Jacobi-Matrix ist)
  Für λ^n-messbare $h : V \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$h \in \mathcal{L}^1(\lambda^n_V) \Leftrightarrow h \circ T \, |\det T'| \in \mathcal{L}^1(\lambda^n_U) \qquad \int\limits_V h(y)dy = \int\limits_{T^{-1}(V)=U} h(T(x)) \, |\det T'(x)| \, dx$$

  Korollar: $(\lambda^n_U)^T = \left|\det T'^{-1}\right| \lambda^n_V$
  Transformationsformel: $T : (\Omega, \mathfrak{a}) \to (\Omega', \mathfrak{a}')$, für $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+(\mathfrak{a}')$ oder $f \in \mathcal{L}^1(\mu^T) \Leftrightarrow f \circ T \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:

$$\int f d\mu^T = \int f \circ T d\mu$$

Allgemein:

- *Substitutionsregel:*

$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{f(u)}{g'(x)} du \qquad u = g(x), du = g'(x)dx$$

- *Partielle Integration:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- *Mittelwertsatz der Integralrechnung:* $f, g \in R([a,b])$, f stetig, $g \geq 0$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

- *Taylorformel (Restglied in Integralform):*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n} \int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

- *Kleiner Satz von Fubini (SCHON wieder):* $f : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig:

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,t)dtdx = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,t)dxdt$$

- *Kurvenintegral:* $I \subset \mathbb{R}, \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt *Kurve*
  $L(\gamma) := \int_I |\gamma'(t)| \, dt$ heißt *Länge*

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) : \int_\gamma f(x)dx := \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend (*Gebiet*), $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, dann sind äquivalent:
  1. f ist ein Gradientenfeld (also Gradient einer Funktion)
  2. Das Wegintegral über f ist nur von Start- und Endpunkt abhängig
  3. Das Wegintegral über f bei geschlossenen Wegen ist 0
  4. Im $\mathbb{R}^3$: f ist Wirbelfrei, d.H. rot$f = 0$

- *Flächenintegral im* $\mathbb{R}^3$*:* $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und Jordan messbar, $M \supset K$ offen, $\Phi \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$, dann heißt $S := \Phi(K)$ *parametrische Fläche* vom Rang 2, wenn Rang$\Phi'(x)$ =Rang$(\partial_1\Phi(x), \partial_2\Phi(x)) = 2 \forall x \in K$
  Für $\Phi(u, v)$ heißt $N(u, v) = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ *Normalenvektor* von Φ, $n(u, v) := \frac{N(u,v)}{|N(u,v)|}$
  Sei Φ eine C^1-Fläche mit Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^2$, dann heißt
  $$I(\Phi) := \int\limits_K |N(u, v)|\, d(u, v) = \int\limits_K \left|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right| d(u, v)$$
  Flächeninhalt der Fläche Φ
  Sei $f \in C^1(\Phi(K))$, dann heißt
  $$\int\limits_\Phi f d\sigma := \int\limits_K f(\Phi(u, v)) \left|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right| d(u, v)$$
  Oberflächenintegral von f über Φ
  Für $F(x) = (P(x), Q(x), R(x))$ und $\Phi(x) = (X(x), Y(x), Z(x))$ schreiben wir z.B.:
  $$\int\limits_\Phi P dy \wedge dz := \int\limits_K P(\Phi(u, v)) \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} d(u, v) \qquad \text{mit } \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} := \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u}$$
  Damit gilt also:
  $$\int\limits_\Phi F d\sigma = \int\limits_\Phi P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$
  $$\int\limits_\Phi F n d\sigma := \int\limits_K F(\Phi(u, v)) \cdot n(u, v) \left|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right| d(u, v)$$
  heißt *Oberflächenintegral* von F
- *Gaußscher Integralsatz im* $\mathbb{R}^3$: Sei V ein C^1-Normalbereich bzgl aller Koordinatensysteme, $M \supset V$ offen, $F \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$
  $$\Rightarrow \int\limits_V \text{div} F d(x, y, z) = \int\limits_{\partial V} F \cdot n d\sigma$$
- *Stoke'scher Integralsatz:* Sei Φ Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^2$, K Normalbereich bzgl. beider Achsen. $K \subset M$ offen, $\Phi \in C^2(M, \mathbb{R}^3)$, ∂K pos. orientierter Rand, parametrisiert durch $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$, $G \supset S := \Phi(K)$ offen, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, dann gilt:
  $$\int\limits_\Phi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int\limits_{\Phi\circ\gamma} P dx + Q dy + R dz$$
  ...oder kurz:
  $$\int\limits_\Phi \text{rot} F \cdot n d\sigma = \int\limits_{\Phi\circ\gamma} P dx + Q dy + R dz$$
- *Flächenformel von Gauß:* Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt bzgl. x- und y-Achse mit positiv orientierter, stetiger, rektifizierbarer Randkurve γ, dann gilt:
  $$\lambda^2(B) = \frac{1}{2} \int\limits_\gamma (x dy - y dx)$$
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ heißt *parametrisierte Fläche* oder *Immersion*, wenn rang$\phi'(x) = n \; \forall x \in U$ bzw. ker$\phi'(x) = \{0\}$
  n heißt Dimension, k *Kodimension* der Fläche F
  mit g Gramsche Matrix von ϕ heißt $J_\phi := \sqrt{\det g}$ *jacobi'sche* von ϕ
  Für $E \subset U$ heißt dann
  $$\Rightarrow A_E(\phi) := \int_E J_\phi d\lambda^n$$
  n-dimensionaler Flächeninhalt von ϕ auf E
  Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermanigfaltigkeit. Eine *lokale Parametrisierung* von M ist eine injektive C^1-Immersion $\phi : U \to M$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
  $\Rightarrow \phi(U)$ ist offen, ϕ ist ein Homöomorphismus, für zwei lokale Parametrisierungen $\phi_i : U_i \to V_i$ ist der Parameterwechsel $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \phi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ein C^1-Diffeomorphismus

- Jede C^1-Untermanigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt einen *abzählbaren Atlas*, d.h. es existiert ein abzählbares System von lokalen Parametrisierungen $\phi_i : U_i \to M, i \in \mathbb{N}$ mit $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \phi_i(U_i)$

  $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ heißt *Tangentialvektor* von M in p, wenn es eine differenzierbare Abbildung $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Die Menge T_pM aller Tangentialvektoren von M in einem Punkt p ist ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{n+k}$ und heißt *Tangentialraum in p.*

- *Oberflächenmaß:* Sei M eine n-Dimensionale C^1-Untermanigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+k}$,
  $\mathcal{E} := \left\{E \subset M \mid \forall \text{lokale Param. } \phi : U \to M : \phi^{-1}(E \cap \phi(U)) \in \mathcal{M}(\lambda^n)\right\}$, dann existiert ein reguläres(=$\forall E \in M \exists$äußere messbare Hülle) äußeres Maß ω auf M, so dass $\mathcal{E} = \mathcal{M}(\omega)$, $M \cap \mathcal{L}^{n+k} \subset \mathcal{E}$ sind Borelmengen in M und für lokale Parametrisierungen $\phi : U \to M$ und $\mathcal{E} \ni E \subset \phi(U)$ gilt:

  $$\omega(E) = \int\limits_{\phi^{-1}(E)} J_\phi d\lambda^n$$

  Für $u : M \to \mathbb{R},\ u \in \mathcal{L}^1(\omega) \cup \mathcal{L}^+$ und lokale Param. $\phi : U \to V \subset M$ gilt:

  $$\int\limits_V u d\omega = \int\limits_{\phi^{-1}(V)} u \circ \phi J_\phi d\lambda^n$$

- *Gaußscher Integralsatz:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand, und äußerer Normalen $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dann gilt für ein Vektorfeld $X \in C(\Omega, \mathbb{R})$:

  $$\int\limits_\Omega \operatorname{div} X d\lambda^n = \int\limits_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle d\omega$$